SUCCESSIONI

Tra tutte le funzioni di $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hanno un interesse specifico quelle dove A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, in particolare un sottoinsieme infinito (e dunque superiormente illimitato) di $\mathbb{N}$.

Definizione 1 *Sia A un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$; una funzione $a : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si chiama una successione o anche una successione in $\mathbb{R}$.*

Per questo tipo di funzioni si usano generalmente le lettere $a, b, \ldots$, anziché le lettere $f, g, \ldots$. Inoltre l'immagine di un naturale n tramite la funzione stessa si indica di solito con a_n anziché con $a(n)$. L'elemento a_n è anche detto *termine generale* o *termine n-esimo* della successione.

Una successione a valori reali può essere assegnata mediante *formule esplicite* (formule *chiuse*) del tipo

$$a_n = \frac{1}{n}$$

successione che ad ogni $n \in \mathbb{N}^+$ fa corrispondere il reciproco di n stesso.

In molti casi per indicare una successione si scrivono esplicitamente i "primi" termini,cioè le immagini dei primi elementi del dominio

Esempio.

- La successione $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ si indica anche con la scrittura

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

- La successione $a_n = (-1)^n$ è una successione definita su tutto $\mathbb{N}$ i cui primi elementi sono

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

- La successione $a_n = 3^n$ è una successione definita su tutto $\mathbb{N}$ i cui elementi crescono al crescere di n

$$1, 3, 9, 27, \ldots$$

Le successioni possono essere anche definite per *ricorrenza*:

1. si assegna il valore a_0 di partenza (*valore iniziale);*

2. si da una legge (di *ricorrenza*) che permette di conoscere a_{n+1} una volta trovato a_n

Successione aritmetica

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$$

o esplicitamente dalla formula

$$a_n = a + nr$$

Esempio: *Capitalizzazione semplice degli interessi.*

Si impiega un capitale C per n anni nel regime dell'interesse semplice. Il tasso di interesse impegato è $r > 0$. Ogni anno maturano interessi pari a

$$C \cdot r \cdot 1 = Cr$$

quindi dopo n anni la somma disponibile, il *montante* dell'operazione sarà

$$\begin{array}{rcl} M & = & a_n = C + Crn = C(1 + rn) \\ n & \longmapsto & a_n = C(1 + rn) \end{array}$$

Ricorsivamente

$$\begin{cases} a_0 = C \\ a_{n+1} = a_n + Cr \end{cases}$$

Successione geometrica

Sono successioni per le quali il rapporto tra termini consecutivi è *costante.* Il valore costante del rapporto si chiama *ragione.*

$$a_n = aq^n \text{ o ricorsivamente } \begin{cases} a_0 = a \neq 0 \\ a_{n+1} = a_n q \end{cases}$$

Osservazione 2 *In tali successioni la variazione percentuale tra termini consecutivi è sempre la stessa*

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{aq^n - aq^{n-1}}{aq^{n-1}} = q - 1$$

Chiamiamo q anche *coefficiente di variazione* e $p = q - 1$ il *tasso di variazione percentuale* tra termini consecutivi. Il termine generale della nostra successione sarà

$$a_n = a(1+p)^n$$

Capitalizzazione composta degli interessi

Si impiega un capitale C per n anni nel regime dell'interesse composto. Il tasso di interesse impegato è $r > 0$. Supponiamo che dopo il primo anno il capitale possa essere reinvestito insieme agli interessi maturati fino a quel momento per produrre a loro volta interessi.

$$\begin{aligned} C_1 &= C(1+r) \\ C_2 &= C_1(1+r) = C(1+r)^2 \\ &\dots \\ C_n &= C_{n-1}(1+r) = C(1+r)^n \end{aligned}$$

$\longrightarrow$*successione geometrica di ragione* $(1+r)$.

Definizione 3 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a valori reali. Se per ogni* n *vale la disugaglianza*

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$\{a_n\}$ *si dice* **monotona crescente** *(in senso debole) o non decrescente. Se*

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$\{a_n\}$ *si dice* **monotona decrescente** *(in senso debole) o non crescente.*

Se le disuguaglianza valgono in senso stretto allora si dice che $\{a_n\}$ è monotona **strettamente crescente** o **decrescente** rispettivamente.

Esempio. La successione geometrica

$$a_n = aq^n \text{ è } \begin{cases} \textit{strettamente crescente se } q > 1 \\ \textit{costante } q = 1 \text{ e } q = 0 \\ \textit{strettamente decrescente } 0 < q < 1 \\ \textit{nè crescente nè decrescente se } q < 1 \end{cases}$$

Limiti di successioni

Proprietà asintotiche delle successioni

Definizione 4 *Si chiamano proprietà asintotiche di una successione* $\{a_n\}$ *le proprietà possedute dai suoi termini almeno da un certo indice in poi* n_0*, ossia per valori abbastanza grandi di* n*, ovvero è posseduta da tutti i suoi elementi tranne al più un numero finito.*

Per dire che una proprietà è asintoticamente posseduta da una successione diremo che essa è posseduta **definitivamente.**

Esempio.

$$a_n = \frac{n-3}{n+1} \text{ è a termini } \textit{definitivamente positivi}$$

$$-3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{11} \ldots$$

Successioni convergenti. Infinitesimi

Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

non raggiunge mai il valore 1. Ma per n abbastanza grande il termine $\frac{1}{n}$ diventa sempre più piccolo fino ad avvicinarsi allo zero. Cosi a_n si avvicina "indefinitamente" a 1. Cioè

preso un $\varepsilon > 0$ la *distanza di* a_n da 1 è *definitivamente minore di* ε
ovvero $|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ vale (almeno) definitivamente $\forall \varepsilon > 0$

La condizione $|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ è soddisfatta per gli indici n tali che $n > \frac{1}{\varepsilon}$ e quindi definitivamente. Per cui

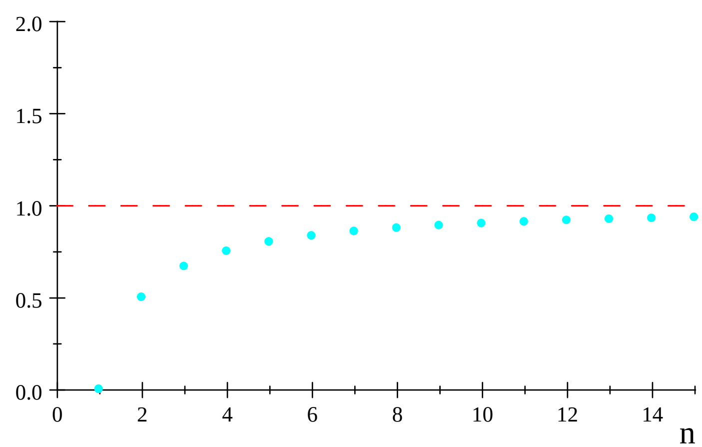
$$a_n = \frac{n-1}{n} \text{ \textit{converge a} } 1$$

Definizione 5 *Una successione* $\{a_n\}$ *si dice* **convergente** *al numero reale* A *se,* $\forall \varepsilon > 0$, *la* **distanza** *di* a_n *da* A *è* **definitivamente minore** *di* ε, *ossia se*

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A \quad \textit{oppure} \quad a_n \longrightarrow A \textit{ per } n \longrightarrow +\infty$$

Grafico successione convergente... $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

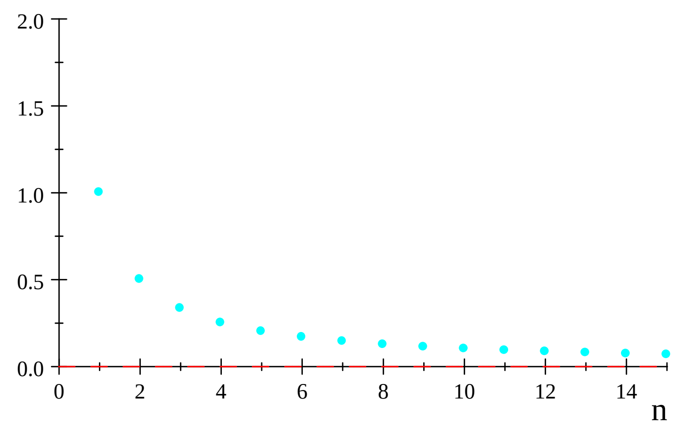


Osservazione 6 *Una successione che converge a zero si chiama* **infinitesimo** *oppure si dice che è* **infinitesima**.

Esempi

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$$

Grafico successione infinitesima... $a_n = \frac{1}{n}$



Successioni divergenti. Infiniti.

Consideriamo la successione

$$a_n = 3n - 2$$

Comunque si scelga un numero M, possibile valore "tetto" per i valori della successione $\{a_n\}$ esso verrà sempre superato da a_n per valori grandi di n.

$$a_n > M \rightarrow 3n - 2 > M$$

che è soddisfatta per tutti gli n tali che

$$n > \frac{M+2}{3}$$

Questa successione *diverge positivamente* quando $n \rightarrow +\infty$.

Osservazione 7 *Se consideriamo l'opposta di* $\{a_n\}$, $b_n = -3n + 2$ *questa successione soddisfa definitivamente la condizione* $b_n < M$ *qualsiasi sia il valore che si sceglie per* M. $\{b_n\}$ *diverge negativamente.*

Esempio

$$a_n = -\sqrt{n}$$

diverge negativamente. Infatti la condizione

$$a_n = -\sqrt{n} < M$$

è sempre vera se $M > 0$;oppure vale da un certo punto in poi ossia quando

$$n > M^2$$

comunque sempre definitivamente.

Definizione 8 *Una successione* $\{a_n\}$ *si dice* **divergente** *a* $+\infty$ $(-\infty)$ *se, per ogni numero reale* M *(positivo o negativo) si ha* **definitivamente**

$$a_n > M \qquad (a_n < M)$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \textit{oppure } a_n \to +\infty \textit{ per } n \to +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \textit{oppure } a_n \to -\infty \textit{ per } n \to +\infty$$

Le successioni divergenti si chiamano **infiniti.** Ad esempio

$$\{n\}, \left\{n^2\right\}, \{2^n\}, \left\{-n^3\right\}$$

Osservazione 9 *Se la succesione* $\{a_n\}$ *è un infinito, allora la succesione* $\{b_n\}$ *"reciproca" della* $\{a_n\}$ *, che ha come termine generale*

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

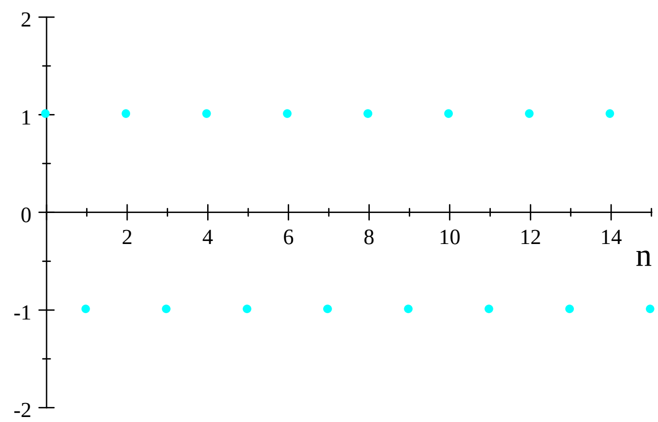
è un infinitesimo. Esempio $b_n = \dfrac{1}{3n-2}$ *è un infinitesimo.*

Successioni irregolari o oscillanti

Esistono successioni che nè convergono nè divergono.

Esempio 1.

$$a_n = (-1)^n$$



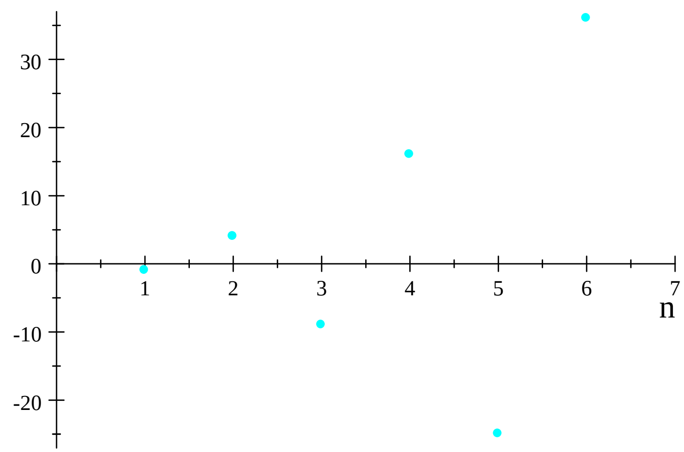
oscilla tra -1 e 1 e la distanza dei suoi termini sia da 1 che da -1 non può risultare definitivamente minore di un arbitrario $\varepsilon(< 2)$.

Esempio 2.

$$b_n = (-1)^n n^2 \text{ con } n \in \mathbb{N}^+$$

ha come primi termini

$$-1, +4, -9, +16, -25, +36, \ldots$$



e non risultano nè definitivamente minori, nè definitivamente maggiori di un numero arbitrario M.

Definizione 10 *Una successione* $\{a_n\}$ *si dice* **irregolare (o oscillante)** *se nè converge nè diverge. In tal caso non esiste il* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Ricapitolando: una successione $\{a_n\}$ può essere:

- *Convergente* ($\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$)

- *Divergente* ($\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$)

- *Irregolare* (non esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$)

Teorema 11 *Se il limite di una successione esiste, esso è unico.*

Esempio. Per la progressione aritmetica si ha

$$\lim_{n\to+\infty}(a_0+nr)=\begin{cases}+\infty, & \text{se } r>0\\ -\infty, & \text{se } r<0\end{cases}$$

Infatti, per $r>0$ si ha $a_0+nr>M$ appena $n\geq(M-a_0)/r$ e, rispettivamente per $r<0$ si ha $a_0+nr<M$ appena $n\leq(M-a_0)/r$.

Esempio. Per la progressione geometrica si ha

$$\lim_{n\to+\infty}q^n=\begin{cases}+\infty, & \text{se } q>1\\ 1, & \text{se } q=1\\ 0, & \text{se } |q|<1, q\neq 0\\ \text{non esiste,} & \text{se } q\leq -1\end{cases}$$

Infatti, per $q > 1$ risulta $q^n > M \Longleftrightarrow n > \log_q M$.

Per $q = 1$ e $q = 0$ la successione è costante.

Per $|q| < 1, q \neq 0$, si ha

$$|q^n - 0| \;=\; |q^n| < \varepsilon \Longleftrightarrow |q|^n < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon$$

(x decrescenza stretta di $\log_{|q|}$)

Quando $q \leq -1$ tutti i termini di indice pari sono ≥ 1, mentre quelli di indice dispari sono ≤ 1, quindi $\lim_{n \to +\infty} q^n$ non esiste.

Proprietà dei limiti delle successioni

Finora si è visto come verificare se una successione ha limite o meno applicando direttamente la definizione e le sue conseguenze. Con tali metodi, però, non è possibile affrontare lo studio delle successioni che non sono estremamente semplici: i calcoli diventerebbero, infatti, troppo laboriosi.

Si vedranno ora dei metodi che permettono di semplificare notevolmente il calcolo dei limiti e che analizzano il comportamento delle successioni attraverso le quattro operazioni elementari e la relazione di disuguaglianza.

I primi due teoremi mostrano un concetto che appare sufficientemente intuitivo: la somma dei limiti è uguale al limite della somma, il prodotto dei limiti è uguale al limite del prodotto dei limiti e allo stesso modo (quando possibile) si può fare per il quoziente.

Teorema 12 *Siano* a_n *e* b_n *due successioni a valori reali tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ e } \lim_{n\to+\infty} b_n = m$$

allora valgono le seguenti proprietà:

1. $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l + m$

2. $\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = lm$

3. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l}{m}$, se $m \neq 0$ e $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema 13 *Siano a_n e b_n due successioni a valori reali.*

1. Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty \Longrightarrow a_n + b_n \to +\infty$

2. Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty \Longrightarrow a_n + b_n \to -\infty$

3. Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty \Longrightarrow a_n b_n \to +\infty$

4. Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty \Longrightarrow a_n b_n \to -\infty$

5. Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to +\infty \Longrightarrow a_n b_n \to -\infty$

6. Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty \Longrightarrow a_n b_n \to +\infty$

7. Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to m \Longrightarrow a_n + b_n \to +\infty$

8. Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to m \Longrightarrow a_n + b_n \to -\infty$

9. Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to m, m > 0 \Longrightarrow a_n b_n \to +\infty$

10. Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to m, m < 0 \Longrightarrow a_n + b_n \to -\infty$

11. Se $a_n \to +\infty$ e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to 0$

12. Se $a_n \to -\infty$ e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to 0$

13. Se $a_n \to 0$ e $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to +\infty$

14. Se $a_n \to 0$ e $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to -\infty$

Teorema 14 *(permanenza del segno) Sia a_n una successione a valori reali convergente al limite l*

1. *Se $l > 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0, \forall n > \overline{n}$ (definitivamente in n)*;

2. *Se $l < 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < 0, \forall n > \overline{n}$ (definitivamente in n).*

Teorema 15 *Siano a_n e b_n due successioni a valori reali tali che*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \text{ e } \lim_{n \to +\infty} b_n = m$$

1. *Se $l < m$ allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < b_n, \forall n > \overline{n}$*

2. *Se* $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ *allora si ha* $l \leq m$

Teorema 16 *Siano* a_n *e* b_n *due successioni a valori reali.*

1. *Se* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow b_n \to +\infty$

2. *Se* $a_n \to -\infty$ *e* $b_n \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow b_n \to -\infty$

Osservazione 17 *Finora nulla è stato dimostrato, ad esempio, nel caso in cui una successione* $\{a_n\}$ *diverga a* $+\infty$ *e un'altra* $\{b_n\}$ *diverga a* $-\infty$ *e si voglia calcolare* $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$.

Infatti, a seconda dei singoli esempi, come vedremo, tale limite può convergere oppure divergere o anche può non esistere. Una successione come quella appena costruita la chiameremo forma indeterminata.

Una **forma indeterminata** è un tipo di successione tale che, pur essendo ottenuta senza ambiguità da altre successioni mediante le quattro operazioni elementari, non è possibile determinare una formula generale per calcolarne il limite.

Schematicamente, dunque, le forme indeterminate si classificano in questo modo:

- forma indeterminata di tipo $0 \cdot \infty$,

- forma indeterminata di tipo $\dfrac{0}{0}$,

- forma indeterminata di tipo $\infty - \infty$,

- forma indeterminata di tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$,

- forma indeterminata di tipo 1^{∞}.

Vari tipi di forme indeterminate possono essere ricondotte alla forma $\frac{0}{0}$.

- Infatti, se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono divergenti (positivamente o negativamente), allora, nel caso in cui ogni loro termine sia diverso da 0, la successione $a_n + b_n$ della forma $\infty - \infty$ si può scrivere come

$$\frac{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}}{\dfrac{1}{a_nb_n}} \text{ , della forma } \frac{0}{0}.$$

- La successione a_nb_n con $a_n \to \pm\infty$ e $b_n \to 0$ (o viceversa), della forma $0 \cdot \infty$, si può scrivere

$$\frac{b_n}{\dfrac{1}{a_n}}, \text{ della forma } \frac{0}{0}.$$

- Si consideri la successione il cui termine generico è rappresentato da un polinomio di grado p

$$a_n = k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + ... + k_p n^p$$

Esempio

$$a_n = 5n^3 + 2n + 7$$

Raccogliendo la n di grado massimo si ha

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} n^3 (5 + \underset{\nearrow 0}{\frac{2}{n^2}} + \underset{\nearrow 0}{\frac{7}{n^3}}) = +\infty$$

- Si consideri una successione il cui termine generico è rappresentato dal rapporto tra due polinomi

$$a_n = \frac{k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + ... + k_p n^p}{h_0 + h_1 n + h_2 n^2 + ... + h_d n^d}$$

allora (raccogliendo al numeratore e al denominatore la potenza di grado massimo n^p e n^d)

1. se $p > d$, allora se $\frac{k_p}{h_d} > 0, a_n \to +\infty$, mentre se $\frac{k_p}{h_d} < 0, a_n \to -\infty$;

2. se $p < d$, allora $a_n \to 0$;

3. se $p = d$, allora $a_n \to \frac{k_p}{h_d}$.

Esempi......

Se $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ e se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si dice che a_n è un o-piccolo di b_n per $n \to +\infty$ e si scrive $a_n = o(b_n)$. Si dice anche che b_n è un *infinito di ordine superiore* a a_n per $n \to +\infty$.

Se $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ e se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si dice che a_n è un o-piccolo di b_n per $n \to +\infty$ e si scrive $a_n = o(b_n)$. Si dice anche che a_n è un *infinitesimo di ordine superiore* a b_n per $n \to +\infty$. Con queste notazioni si ha per esempio

$$\begin{aligned} a_n &= n^2,\ b_n = 3^n \Longrightarrow a_n = o(b_n) \\ a_n &= 3^{-n}, b_n = \frac{1}{n^2} \Longrightarrow a_n = o(b_n) \end{aligned}$$

Teorema 18 *(Confronto successioni convergenti) Siano* a_n , b_n *e* c_n *successioni a valori reali. Supponiamo che*

$$a_n \to l_1, \quad b_n \to l_2$$

e anche che

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \textit{definitivamente in } n.$$

Allora si ha

1. Se c_n è regolare e $c_n \to c$, allora

$$l_1 \leq c \leq l_2.$$

2. Se $l_1 = l_2 = l$. Allora c_n è regolare e $\lim_{n \to +\infty} c_n = l$.

Teorema 19 *(Regolarità delle successioni monotone) Sia a_n una successione a valori reali.*

1. Se a_n è una successione monotona crescente , allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

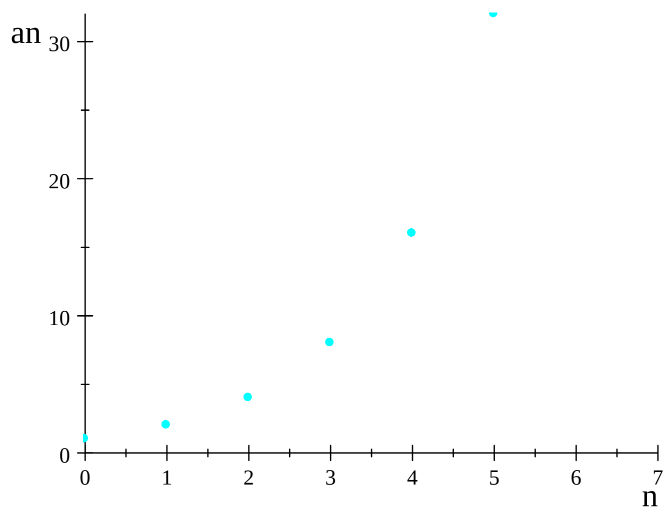
2. Se a_n è una successione monotona decrescente , allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Esempi.

1. $a_n = 2^n$

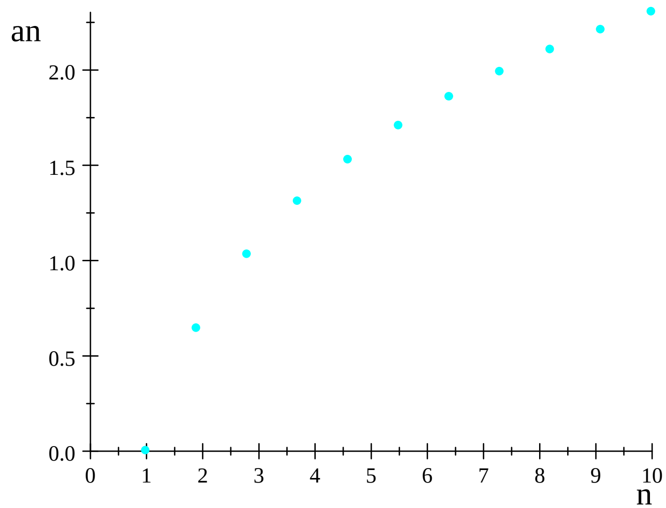
2. $a_n = \log n$

$\boxed{a_n = 2^n}$



ogni successione del tipo a^n con $a > 1$ è monotona crescente ed essendo il $\sup_{n \in \mathbb{N}} 2^n = +\infty$, allora si ha che $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

$\boxed{a_n = \ln n}$



la successione $\ln n$ è monotona crescente. Per come è definito il logaritmo, se esistesse un $M > 0$ tale che $\ln n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$,allora $n \leq e^M \ \forall n \in \mathbb{N}$ che sarebbe evidentemente impossibile. Essendo il $\sup_{n \in \mathbb{N}} \ln n = +\infty$, allora si ha che $\lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$.

Limite notevole: il numero di Nepero

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall n \geq 1$$

Si ha:

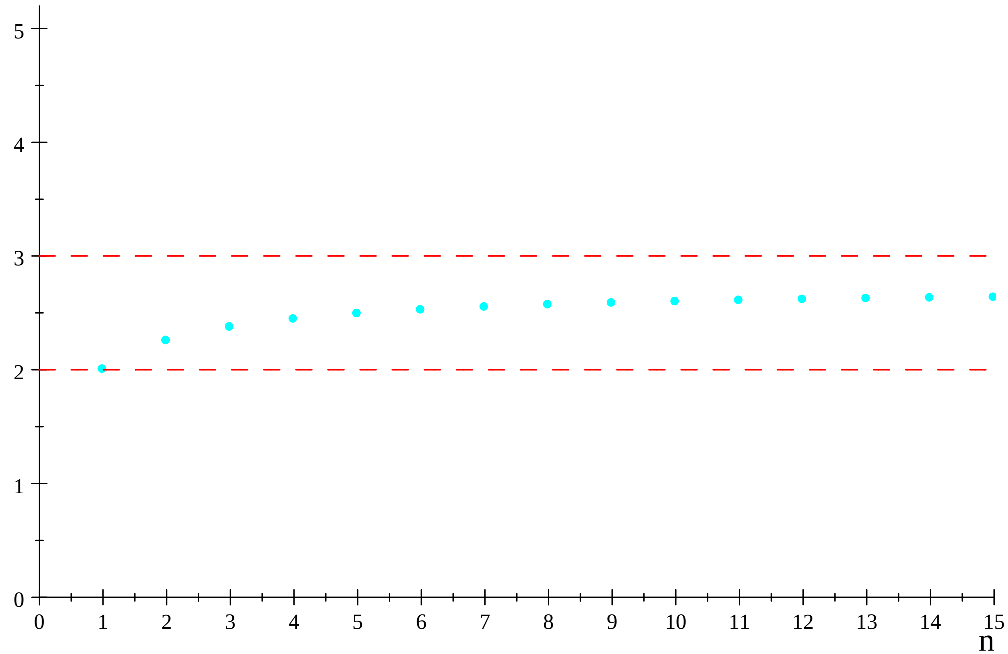
1. a_n è monotona strettamente crescente;

2. a_n è limitata, $2 \leq a_n \leq 3$, $\forall n \geq 1$.

In particolare a_n è convergente ad un numero reale irrazionale, che si indica con e, detto numero di Nepero, $e = 2,71828$

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Grafico della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$



LIMITI DI SUCCESSIONI ELEVATI A LIMITI DI SUCCESSIONI

Siano a_n e b_n due successioni regolari. Supponiamo che $\{a_n\} > 0$ definitivamente in n e che i limiti delle due successioni siano rispettivamente $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in [0, +\infty]$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.

Allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left((a_n)^{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to+\infty} b_n} = a^b$$

(se non sono presenti f.i $1^{\pm\infty}, \infty^0$). In particolare (lo si veda dopo) se

$$a = 0 \text{ e } b < 0 \text{ allora } \lim_{n\to+\infty} \left((a_n)^{b_n}\right) = +\infty$$

Limiti di logaritmi

Se $\{a_n\} > 0$ definitivamente in n e $a_n \to a \in (0, +\infty)$ allora si ha

$$\log(a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a = +\infty \\ \log(a) & \text{se } a = (0, +\infty) \\ -\infty & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora i seguenti casi

- $$\boxed{a_n \to a \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \text{ e } b_n \to b \in \mathbb{R}}$$

  Dato che $a_n > 0$ definitivamente, possiamo scrivere $a_n = e^{\ln(a_n)}$ definitivamente in n. In particolare

  $$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$$

Dato che $a \neq 0, 1, +\infty$ il prodotto dei limiti $b \log a$ non dà luogo a forme indeterminate. Se ne deduce che

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \ln a} = a^b$$

- $$\boxed{a_n \longrightarrow a = 0 \text{ e } b_n \longrightarrow b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Se $b \in (0, +\infty)$ si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \ln a} = e^{b(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Se $b \in (-\infty, 0)$ si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \ln a} = e^{b(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

- $$\boxed{a_n \longrightarrow a = 1 \text{ e } b_n \longrightarrow b \in \mathbb{R}}$$

  dato che $b \in \mathbb{R}$ si ha

  $$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \ln a} = e^{b(0)} = 1$$

- $$\boxed{a_n \longrightarrow a = +\infty \text{ e } b_n \longrightarrow b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

  Se $b \in (0, +\infty)$ si ha

  $$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \ln a} = e^{b(\infty)} = e^{\infty} = +\infty$$

  Se $b \in (-\infty, 0)$ si ha

  $$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n} \longrightarrow e^{b \ln a} = e^{b(\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

- Tutti gli altri casi corrispondono alle forme indeterminate

$$1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0$$

CALCOLO DI LIMITI CON FORME INDETERMINATE $1^{\pm\infty}$

Il limite che definisce il numero di Nepero porta ad una forma indeterminata del tipo $1^{\pm\infty}$.

La formula fondamentale per risolvere le forme indeterminate del tipo $1^{\pm\infty}$ è la seguente:

Se $a_n \to +\infty$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Esempio. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Ma $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{n^2}n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1.$

Esercizi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}};\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n};\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3};\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}$$