TEORIA DELLE DERIVATE

Premessa

Consideriamo due tipi di funzioni, quelle *lineari* e tutte le altre. Scegliamo tre funzioni

$$f(x) = 5x + 3, \quad g(x) = 1 - 2x, \quad p(x) = x^2$$

x	$5x+3$	$1-2x$	x^2
0	3	1	0
1	8	-1	1
2	13	-3	4
3	18	-5	9

Indichiamo con Δx la differenza tra un valore di x e il precedente, cioè l'incremento della variabile x, e con Δf, Δg e Δp i corrispondenti incrementi per le funzioni. Notiamo che per $\Delta x = 1$ avremo $\Delta f = 5$ e $\Delta g = -2$ costantemente, mentre Δp varia di volta in volta. Consideriamo ora una variazione della x, $\Delta x = 0.5$

x	$5x+3$	$1-2x$	x^2
0	3	1	0
0.5	5.5	0	0.25
1	8	-1	1
1.5	10.5	-2	2.25
2	13	-3	4
2.5	15.5	-5	6.25
3	18	-5	9

Ora per $\Delta x = 0.5$ avremo $\Delta f = 2.5$ e $\Delta g = -1$ costantemente. Le funzioni lineari variano in quantità uguali, mentre Δp varia in maniera non costante.

Avendo dimezzato l'incremento della x, la prima funzione che prima aumentava di 5 ora ha un incremento di 2.5, mentre la seconda che diminuiva di 2 ora diminuisce di 1.Infatti

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{5}{1} = 5 \ \text{ e } \ \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$$

e

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2.5}{0.5} = 5 \ \text{ e } \ \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{-1}{0.5} = -2$$

Per le funzioni *lineari* il rapporto tra la variazione del valore della funzione e la variazione della variabile x rimane *costante. Proprietà delle funzioni lineari: la loro variazione è* **proporzionale** *alla variazione di* x. Geometricamente tale rapporto non è altro che il coefficiente angolare delle rette che rappresentano le funzioni f e g.

Vediamo ora cosa succede alla funzione $p(x) = x^2$.Calcoliamo direttamente i rapporti tra variazione di p e variazione di x

x	$\frac{(x+1)^2-x^2}{1}$
0	$1-0=1$
1	$4-1=3$
2	$9-4=5$
3	$16-9=7$

e

x	$\frac{(x+0.5)^2-x^2}{0.5}$
0	$(0.25-0)/0.5=0.5$
0.5	$(1-0.25)/0.5=1.5$
1	$(2.25-1)/0.5=2.5$
1.5	$(4-2.25)/0.5=3.5$
2	$(6.25-4)/0.5=4.5$
2.5	$(9-6.25)/0.5=5.5$

I rapporti tra i due incrementi variano da punto a punto. In questo caso aumentano all'aumentare di x. Consideriamo due valori di x, x_0 e x_1. Avremo

$$\Delta p = x_1^2 - x_0^2 \text{ e } \Delta x = x_1 - x_0$$

Se chiamiamo

$$x_1 = x_0 + h$$

dove $h = \Delta x$ che non deve essere necessariamente positiva. Si ha

$$\Delta p = x_1^2 - x_0^2 = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2 = 2hx_0 + h^2$$

e quindi

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

Il rapporto tra le variazioni della funzione e della variabile varia sia a seconda del valore iniziale di x_0 sia a seconda dell'incremento della x, h. Per valori di h non molto grandi, tuttavia, il rapporto cosiderato è un numero abbastanza vicino a $2x_0$

$$x_1^2 - x_0^2 \simeq 2x_0\,(x_1 - x_0)$$

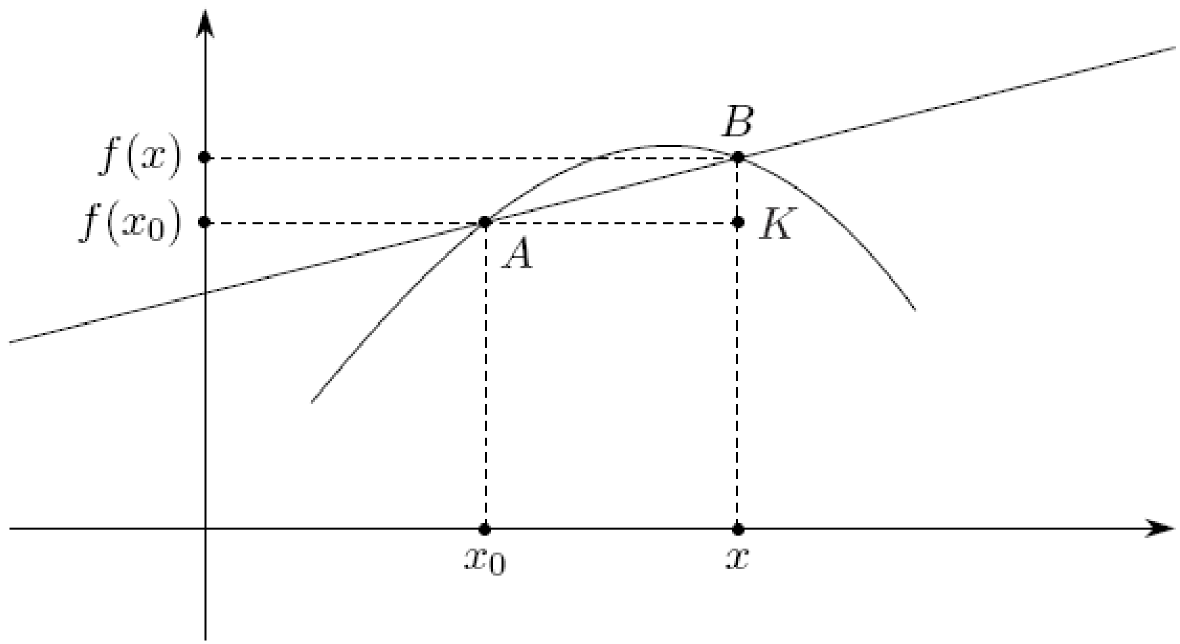
Definizione di derivata. Prime proprietà.

Definizione 1 *Data una funzione* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e un punto* $x_0 \in A$, *chiameremo il rapporto*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

il **rapporto incrementale** *della funzione* f *nel punto* x_0, *relativo all'incremento* $x - x_0$.

Il rapporto incrementale rappresenta il *tasso di variazione medio* di f relativo all'incremento di variabile da x_0 a x.



Il *significato geometrico* del rapporto incrementale: si verifica facilmente che si tratta del coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(x_0, f(x_0))$ e $B(x, f(x))$, retta che si chiama *secante* il grafico

Se passiamo al limite per $x \longrightarrow x_0$ supponendo che tale limite esista, avremo che il punto B si muove lungo il grafico di f verso A. Quindi tutte le rette secanti in B e A variano la loro pendenza fino ad una retta limite che prende il nome di *retta tangente al grafico di* f nel punto A: la sua pendenza prende il nome di **derivata di** f nel punto x_0.

Definizione 2 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *e un punto* $x_0 \in A$*;* f *si dice* **derivabile** *in* x_0 *se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale*

$$f^{'}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che prende il nome di **derivata (prima)** *di* f *in* x_0*. La derivata prima si può anche indicare con uno di questi altri simboli* $(Df)(x_0)$*,* $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ *.*

Se il rapporto incrementale può essere interpretato come tasso di variazione medio di f nell'intervallo di estremi x_0 e x, la derivata può essere interpretata come *tasso di variazione puntuale.*

Osservazione. La derivabilità di una funzione in un punto x_0 del suo dominio può essere interpretata come la condizione per l'esistenza della *retta tangente* al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Si deduce che se f è *derivabile* in x_0 l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$ è data da

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Abbiamo gia visto negli esempi introduttivi che per *funzioni lineari affini* la derivata in qualsiasi punto x_0 è *costante* e pari a m, coefficiente angolare della funzione lineare considerata. Infatti data la retta

$$y = mx + q$$

se ci spostiamo da un suo punto (x_0, y_0) ad un altro punto (x, y) troviamo che

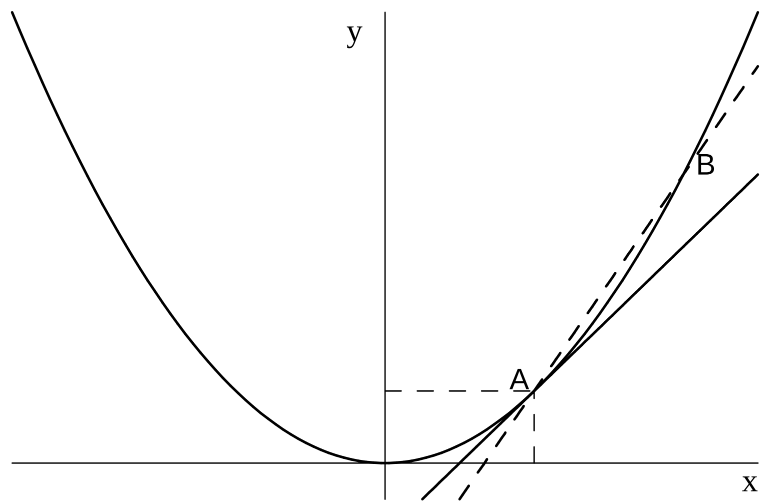
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{mx + q - mx_0 - q}{x - x_0} = \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m$$

Inoltre avevamo trovato che per $f(x) = x^2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

Per $x \to x_0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = x + x_0 = 2x_0$$



Quindi man mano che B si muove lungo la parabola verso A le rette secanti in B e A si assestano sulla retta tangente alla parabola nel punto A, di equazione

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$$

Il numero $2x_0$, coefficiente angolare della tangente, è la *derivata della funzione* $f(x) = x^2$ nel punto x_0.

Osservazione. Se, nella definizione di rapporto incrementale e successivamente di derivata, poniamo $x - x_0 = \Delta x = h$, possiamo riscrivere la definizione di derivata come

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ o anche } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivabilità e continuità. Derivate destre e sinistre.

Una funzione derivabile non può avere salti o altre discontinuità.

Teorema 3 *(***Continuità delle funzioni derivabili***)*. *Se una funzione f è derivabile nel punto x_0 del suo dominio, allora f è continua in x_0.*

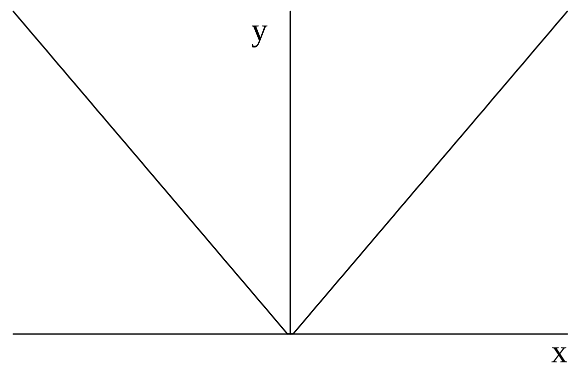
Per $x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Se ora $x \to x_0$, il secondo membro tende al prodotto di $f'(x_0)$ che è finito e 0 quindi complessivamente tende a 0. Ma allora $f(x) \to f(x_0)$, ovvero f è *continua in* x_0.

Osservazione. Si noti che, come prova l'esempio della funzione $f(x) = |x|$, non vale il viceversa di questo teorema: una funzione può benissimo essere continua in un punto, senza essere ivi derivabile. Cioè esistono funzioni *continue ma non derivabili.* Quindi *la continuità è una condizione necessaria ma non sufficiente* *a garantire la derivabilità.* La funzione $f(x) = |x|$ è continua nell'origine ma non è derivabile. Infatti il suo rapporto incrementale è

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad h > 0 \\ -1 & \text{se} \quad h < 0 \end{cases}$$



Esistono dunque i limiti del rapporto incrementale da destra e da sinistra ma sono diversi; quindi la derivata in $x_0 = 0$ di f non esiste.

Definizione 4 *Si chiamano* **derivata destra** *e* **sinistra** *di f in x_0 i limiti (se esistono finiti)*

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Precisamente quando in un punto x_0 esistono la derivata sinistra e destra di f ma sono diverse tra loro, si dice che il punto x_0 è **angoloso.** Nel caso di $f(x) = |x|$ il punto $x_0 = 0$ è un punto angoloso.

Le derivate delle funzioni elementari.

Funzione costante

La funzione $f(x) = k$ ha derivata nulla infatti $f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0$.

Funzioni potenza n-esima.

La funzione $f(x) = x$ potenza di grado uno, è derivabile e la derivata è $f^{'}(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Sia ora $n \geq 2$ e cosideriamo la funzione $f(x) = x^n$. Si ha

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

ma $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h +$ potenze di h con esponente ≥ 2 quindi avremo che

$$\frac{\Delta f}{h} = nx^{n-1} + o(1) \longrightarrow nx^{n-1}$$

se $h \longrightarrow 0$. Quindi $f(x) = x^n$ è derivabile e la sua derivata è

$$\boxed{f^{'}(x) = nx^{n-1}}$$

Osservazione. La formula appena trovata si estende al caso in cui l'esponente sia un qualsiasi numero reale α. Queste funzioni sono in generale definite per $x > 0$ e quindi risultano derivabili $f(x) = x^{\alpha}$,

$$f^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Esempi.

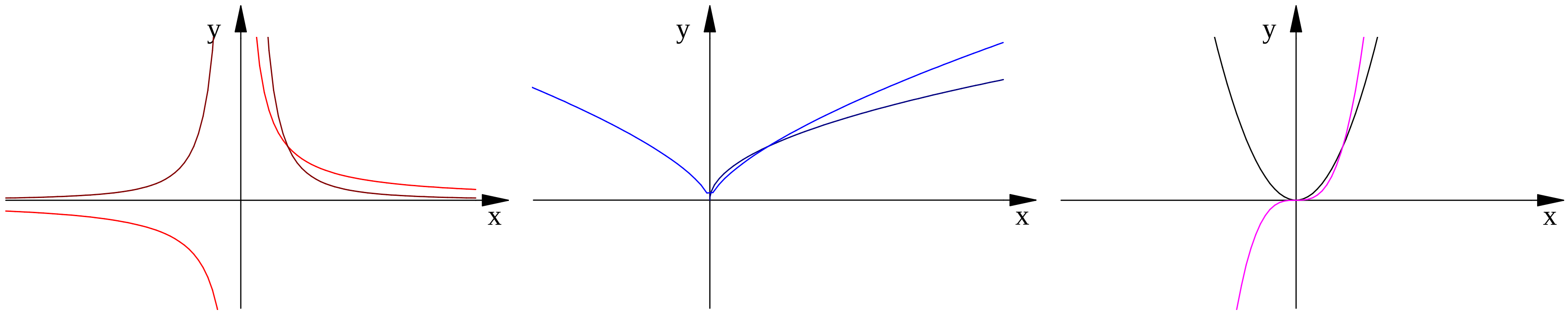
- $D\left(\frac{1}{x}\right) = Dx^{-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, definita e derivabile $x \neq 0$,

- $D\left(\frac{1}{x^3}\right) = Dx^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$,definita e derivabile $x \neq 0$,

- $D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, definita in $[0, +\infty)$,derivabile $x \neq 0$

- $D\sqrt[3]{x^2} = Dx^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, definita in $\mathbb{R}$ e derivabile $x \neq 0$,

- $Dx^2 = 2x$, e $Dx^3 = 3x^2$ definite in $\mathbb{R}$ e sempre derivabili.



I grafici delle funzioni potenza hanno retta tangente verticale in $x = 0$ se $0 < \alpha < 1$. Queste funzioni non sono perciò derivabili in $x = 0$. Se $\alpha > 1$ i grafici all'origine hanno pendenza nulla. Infatti:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{\alpha - 1} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Dunque per le funzioni potenza $f_+^{'}(0)$ *esiste solo se* $\alpha \geq 1$. Analogamente si può trovare $f_+^{'}(0)$ se f è definita su $\mathbb{R}$.

Le funzioni *esponenziali*, *logaritmiche* e *trigonometriche* sono derivabili in ogni punto del loro dominio. Ricordiamo 4 limiti già visti che possono essere utili per il calcolo delle derivate di queste funzioni.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 & \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0 \end{array}}$$

Funzioni esponenziali.

La funzione $f(x) = e^x$ ha derivata pari a se stessa. Infatti

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x$$

Per la funzione $g(x) = a^x$, con $a > 0$, si ha $g^{'}(x) = a^x \ln a$ (vedremo piu avanti perchè).

Funzioni logaritmiche.

La funzione $f(x) = \ln x$ ha derivata pari a $f^{'}(x) = \dfrac{1}{x}$. Infatti

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{h} \ln(1 + \frac{h}{x}) = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \ln(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{h \to 0} (1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} \right) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

Per la funzione $g(x) = \log_a x$, con $a > 0$, si ha $g^{'}(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$, usando la formula del cambiamento di base $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Funzioni circolari

Cominciamo dalla funzione *seno*. Sia $f(x) = \sin x$; si ha

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

per la formula di addizione del seno, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, avremo

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x \right) = \\
&= 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x
\end{aligned}
$$

Quindi $D \sin x = \cos x$.

Ora proviamo che la derivata della funzione *coseno* è $D(\cos x) = -\sin x$, ricordando la formula di addizione per il coseno, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(-\cos x \frac{1-\cos h}{h} - \frac{\sin h}{h} \sin x \right) = \\
&= 0 \cdot (-\cos x) - \sin x = -\sin x
\end{aligned}
$$

Quindi $D \cos x = -\sin x$.

Si trova facilmente che $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ e che $D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Algebra delle derivate

Derivata del prodotto di una costante per una funzione.

$$D\left[kf(x)\right] = kDf(x), \quad k \text{ costante}$$

infatti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = k \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = kf^{'}(x_0)$$

Teorema 5 *Se due funzioni f e g sono derivabili in un punto x_0, anche la somma,il prodotto e il quoziente (quest'ultimo se g è non nulla in x_0) sono derivabili.*

1. $D(f + g) = f^{'} + g^{'}$

2. $D(f \cdot g) = f^{'}g + fg^{'}$

3. $D(f/g) = \dfrac{f^{'}g - fg^{'}}{g^2}$

Dimostrazione.

1. Per la somma:
$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
e prendendo il limite per $x \longrightarrow x_0$ si conclude che
$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} \rightarrow f^{'}(x_0)+g^{'}(x_0)\,.$$

2. Per il prodotto:
$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

sottraiamo e sommiamo $f(x_0)g(x)$ al numeratore:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

passiamo al limite di $x \longrightarrow x_0$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f^{'}(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) g^{'}(x_0)$$

3. Per il quoziente:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) \left(\frac{1}{x - x_0} \right) = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \frac{1}{x - x_0} =$$

sottraiamo e sommiamo $f(x_0)g(x_0)$ al numeratore

$$= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \frac{1}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \right)$$

e passando al limite di $x \longrightarrow x_0$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \longrightarrow \frac{f^{'}(x_0)\, g(x_0) - f(x_0) g^{'}(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Osservazioni.

La derivata del prodotto di più fattori è uguale alla somma dei vari prodotti che si ottengono derivando ciascun fattore e lasciando gli altri non derivati:

$$D\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right]=$$

$$=f_1^{'}(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+f_1(x)\cdot f_2^{'}(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+\ldots+f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n^{'}(x)$$

In particolare

$$D\left[f(x)\right]^n=n\left[f(x)\right]^{n-1}f^{'}(x)\quad\text{con } n\in\mathbb{N}_0$$

infatti si ha

$$D\left[f(x)\right]^n\;=\;D\underbrace{\left[f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)\right]=}_{n\text{ volte}}$$

$$=f^{'}(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)+f(x)\cdot f^{'}(x)\cdot\ldots\cdot f(x)+\ldots+f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f^{'}(x)=$$

$$=n\left[f(x)\right]^{n-1}f^{'}(x)$$

Derivata della funzione reciproca: sia $f(x)$ una funzione derivabile e diversa da zero allora

$$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

ESEMPI

1. $D(xe^x)$; $\quad D\left(x^2 + \cos x\right)\ln x$

2. $D\dfrac{x^2}{2x+1}$; $\quad D\dfrac{\ln x}{x}$; $\quad D(x \sin x)$

3. $D\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$; $\quad D\dfrac{1}{x^2-5}$; $\quad D\dfrac{e^x}{2x+3}$

Derivata della funzione composta

Prendiamo due funzioni componibili f e g, tali cioè che se x appartiene al dominio di g, la sua immagine tramite g, $y = g(x)$ si trova nel dominio di f. In questo caso possiamo parlare di $f \circ g$ e quindi della funzione $z = f\left[g(x)\right]$.

Teorema 6 *Se g è derivabile in x e f è derivabile in $g(x)$ allora $f \circ g$ è derivabile in x e vale la formula*

$$(f \circ g)^{'}(x) = f^{'}\left[g(x)\right] \cdot g^{'}(x)$$

Questa regola viene anche chiamata *regola della catena.* Se infatti poniamo $z = f(y)$ con $y = g(x)$ avremo

$$(f \circ g)^{'} = \frac{dz}{dx}, \quad f^{'} = \frac{dz}{dy}, \quad g^{'} = \frac{dy}{dx}$$

per cui

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

che esprime proprio che il *tasso di variazione di* z rispetto a x può essere visto come il prodotto dei tassi di variazione di z rispetto a y e di y rispetto a x.

Esempi.

Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(x^2 + x + 1)$

Si può considerare la funzione f composta dalle funzioni

$$z = f(y) = \sin y \text{ e } \; y = g(x) = x^2 + x + 1$$

usando $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ avremo

$$\frac{dz}{dx} = \cos y \cdot (2x + 1) = (2x + 1) \cos\left(x^2 + x + 1\right)$$

Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$. Allora

$$z = f(y) = \sqrt[3]{y} \text{ e } \ y = g(x) = \ln x$$

per cui

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{x} = \frac{1}{3x \sqrt[3]{\ln^2 x}}$$

Calcolare la derivata di $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Allora

$$z = f(y) = \ln y \text{ e } \ y = g(x) = x^2 + 1$$

per cui

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}(2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\sin(2x+\frac{\pi}{4})}$ Allora in questo caso abbiamo la composizione di tre funzioni

$$z = f(y) = e^y \ , \ \ y = g(t) = \sin t \ \ \text{e} \ \ t = h(x) = 2x + \pi/4$$

per cui

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

Nel nostro esempio quindi

$$\frac{dz}{dx} = e^y \cdot \cos t \cdot (2) = 2e^{\sin(2x+\frac{\pi}{4})}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

Osservazioni.

- Con l'applicazione della regola di derivazione della funzione composta si può constatare che

$$De^{f(x)} = e^{f(x)} f^{'}(x)$$

e

$$D \ln f(x) = \frac{f^{'}(x)}{f(x)}$$

- Con l'applicazione della regola di derivazione della funzione composta, determiniamo la

$$D\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

dove f e g sono funzioni deivabili e con $f(x) > 0$. Per la definizione di logaritmo si ha che $\forall x$

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

e quindi

$$D\,[f(x)]^{g(x)} = De^{g(x) \ln f(x)} = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot \left[g^{'}(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f^{'}(x) \right]$$

$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left[g^{'}(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f^{'}(x)}{f(x)} \right]$$

- In particolare se $g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$

$$D\,[f(x)]^{\alpha} = \alpha\,[f(x)]^{\alpha - 1} \cdot f^{'}(x)$$

Esempio. Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

$$D\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-1}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

Calcolare la derivata di $f(x) = x^x$

$$Dx^x = x^x(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$$

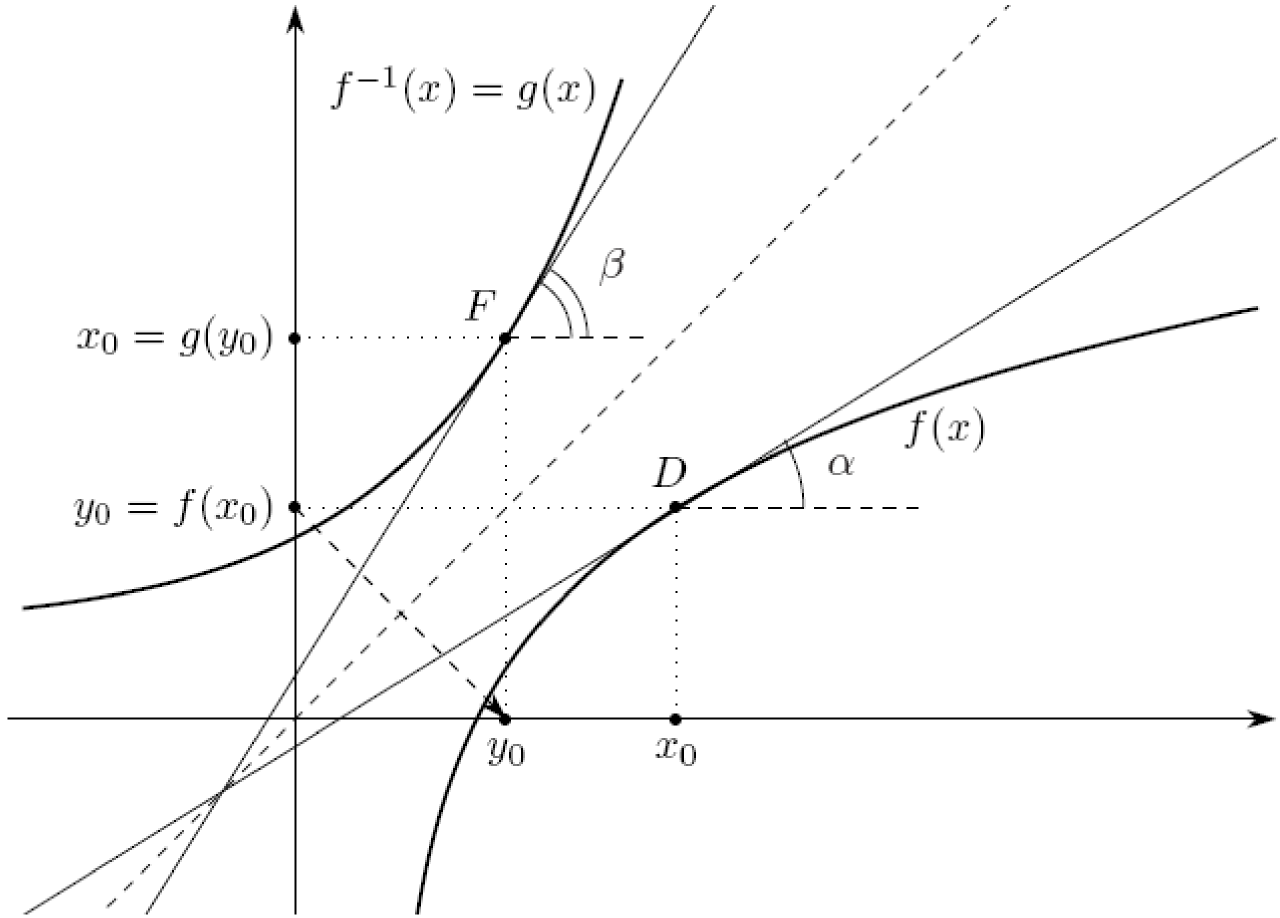
Derivata della funzione inversa

Ricordiamo che se f è una corrispondenza buinivoca tra due intervalli (a, b) e (c, d) si può parlare di funzione inversa di f, $g = f^{-1}$.

Teorema 7 *Sia f una funzione strettamente monotona definita in un intervallo e sia g la sua inversa. Se f è derivabile in un punto x_0 con derivata non nulla, posto $y_0 = f(x_0)$, la funzione inversa è derivabile in y_0 e si ha*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

La regola di derivazione della funzione inversa può essere giustificata geometricamente.



$f^{-1}(x) = g(x)$
β
F
$x_0 = g(y_0)$
$f(x)$
α
D
$y_0 = f(x_0)$
y_0
x_0

Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $f(x)$ nel punto D è esattamente la derivata di f calcolata in x_0.Cioè

$$f^{'}(x_0) = \tan\alpha$$

$\tan\beta$ invece rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva inversa di f nel punto F. L'ipotesi $f^{'}(x_0) \neq 0$ implica che la retta tangente non sia parallela all'asse x. Le già viste proprietà di simmetria tra una funzione e la sua inversa, rendono evidente che le rette tangenti nei punti simmetrici D e F formano con l'asse x angoli, α e β, tra loro complementari, quindi i coefficienti angolari sono reciproci:

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

che spiega geometricamente il significato di $g^{'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Derivate delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche.

- *Derivata della funzione* $f(x) = \arctan x$.

La sua funzione inversa è $x = \tan y$, definita in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, è derivabile nel suo dominio. La derivata è

$$D \tan y = D\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = \frac{\cos y \cos y + \sin y \sin y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

Quindi $g'(y) = 1 + \tan^2 y \neq 0$. f è quindi derivabile e avremo

$$\boxed{D \arctan x = \frac{1}{D \tan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}}$$

- *Derivata della funzione* $f(x) = \arcsin x$.

La sua funzione inversa è $x = \sin y$, definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, è derivabile nel suo dominio. La derivata è

$$D \sin y = \cos y$$

Quindi $g^{'}(y) = \cos y \neq 0$ in tutto l'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. f è quindi derivabile e avremo

$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y}$$

Ora sappiamo che $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \to \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \to \cos y = \sqrt{1 - x^2}$ quindi

$$\boxed{D \arcsin x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

- $\boxed{D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$ e $\boxed{D \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1 + x^2}}$

Funzione	***Derivata***
k	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	nx^{n-1}
$x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$	ax^{a-1}
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a \mathrm{e}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1 + \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f^a(x)$	$n f^{a-1}(x) \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}(\ln a) f'(x)$
$\mathrm{e}^{f(x)}$	$\mathrm{e}^{f(x)} f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} \log_a \mathrm{e}$
$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$

$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\operatorname{tg} f(x)$	$\left(1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right) f'(x) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$	$\mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$

PROPRIETA' LOCALI. FUNZIONI DERIVABILI IN UN INTERVALLO.

Funzioni crescenti e decrescenti in un punto. Massimi e minimi relativi.

Definizione 8 *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in (a,b)$. *Se esiste un intorno di* x_0 *contenuto in* (a,b) *tale che per ogni suo punto si abbia:*

- *da* $x < x_0$ *segue* $f(x) \leq f(x_0)$ *e contemporaneamente da* $x > x_0$ *segue* $f(x) \geq f(x_0)$ *allora la funzione si dice* **crescente** *in* x_0 *(crescente in senso stretto se le disuguaglianze valgono senza l'uguale);*

- *da* $x < x_0$ *segue* $f(x) \geq f(x_0)$ *e contemporaneamente da* $x > x_0$ *segue* $f(x) \leq f(x_0)$ *allora la funzione si dice* **decrescente** *in* x_0 *(decrescente in senso stretto se le disuguaglianze valgono senza l'uguale);*

- $f(x) \leq f(x_0)$, *allora il punto* x_0 *si dice di* **massimo relativo** *(di massimo relativo proprio se la disuguaglianza vale in senso stretto);*

- $f(x) \geq f(x_0)$, *allora il punto* x_0 *si dice di* **minimo relativo** *(di minimo relativo proprio se la disuguaglianza vale in senso stretto).*

Teorema 9 *(***Teorema di Fermat***) Se una funzione è derivabile in un punto* x_0 *che sia interno al dominio, e ha un massimo o minimo relativo in* x_0*, allora si ha necessariamente che*

$$\underbrace{f^{'}(x_0) = 0}$$

Condizione del primo ordine (FOC) affinchè x_0 sia di estremo locale

Dimostrazione. Sia x_0 un punto, per esempio, di massimo relativo interno al dominio. Se fosse $f'(x_0) > 0$, la funzione sarebbe crescente in x_0, per cui a destra di x_0 (e ci sono punti a destra di x_0 perché x_0 è interno) la funzione sarebbe più grande di $f(x_0)$, contro l'ipotesi che x_0 sia di massimo. Analogamente non può essere $f'(x_0) < 0$. Dunque $f'(x_0) = 0$.

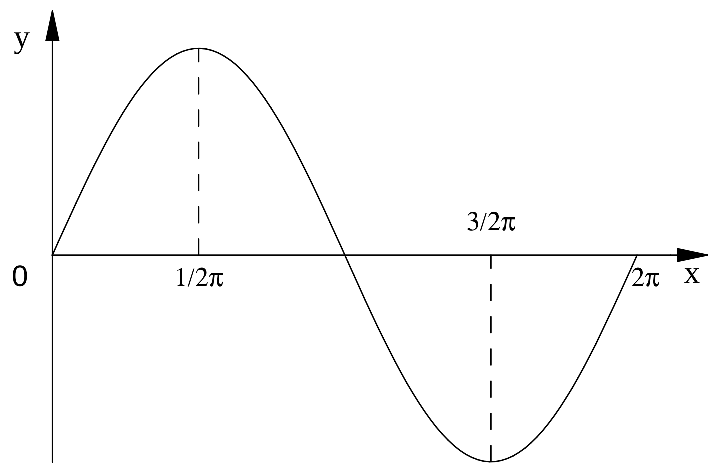
Osservazioni.

- I punti in cui si annulla la derivata prima sono punti a tangente orizzontale e si chiamano *punti stazionari.* I punti in cui si annulla la derivata prima o questa non esiste sono detti *punti critici.*

- Per la validità del teorema è *essenziale* che si tratti di *massimo e minimo relativo* **interno** *al dominio.*

Esempio. La funzione $y = \sin x$, considerata nell'intervallo $[0, 2\pi]$, ha derivata $y^{'} = \cos x$.

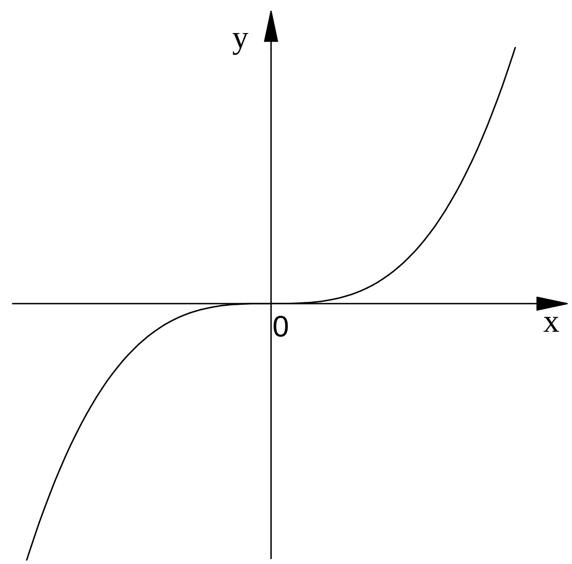
$$y^{'} = \cos x = 0 \text{ per } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{3}{2}\pi \text{ interni all'intervallo } [0, 2\pi]$$



Nell'estremo $x = 0$ si ha un minimo relativo, cosi pure nell'estremo 2π si ha un massimo relativo, ma in questi punti risulta rispettivamente $y^{'}(0) = 1$ e $y^{'}(2\pi) = 1$.

- Il teorema di Fermat è una condizione *necessaria* per l'esistenza di estremi relativi interni ad un intervallo. La condizione però non è *sufficiente*: in un punto la derivata prima può annullarsi senza che in quel punto la funzione abbia un massimo o un minimo relativo

Esempio. La funzione $f(x) = x^3$ ha derivata nulla in $x = 0$ e $f(0) = 0$



Inoltre:

- per $x < 0$: $f(x) < 0 = f(0)$;

- per $x > 0$: $f(x) > 0 = f(0)$.

Nel punto $x = 0$, in cui si annulla la derivata di $f(x)$, la funzione non ha quindi nè massimo, nè minimo, perche non esiste un intorno di tale punto in cui risulti sempre $f(x) \leq f(0) = 0$ oppure $f(x) \geq f(0) = 0$. Questo significa che la tangente alla curva nel punto $x = 0$, pur essendo parallela all'asse x, attraversa la curva.

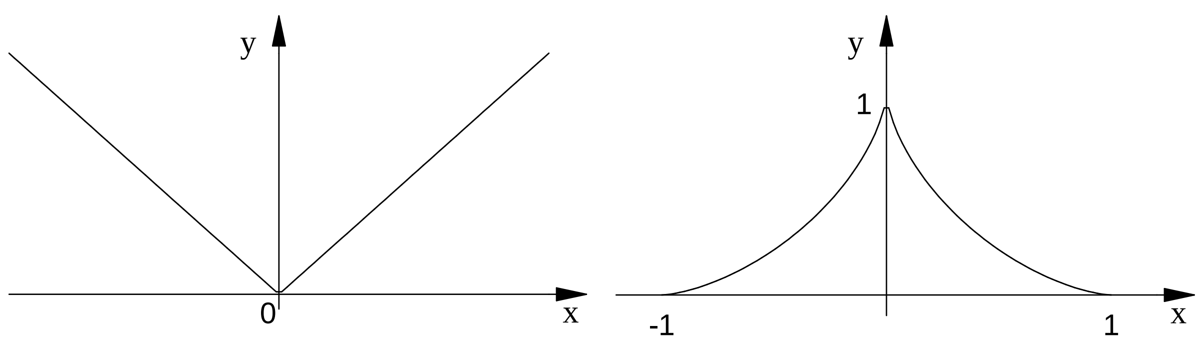
- Un punto può essere d'estremo per f anche se in tal punto la funzione non è *derivabile.*

Esempio 1. La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$ infatti $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, ma è un *minimo;* infatti $f(0) = 0$, mentre per $x \neq 0$, $f(x) > 0$.

Esempio 2. La funzione $f(x) = \sqrt{\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}$ è definita per $\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3 \geq 0$ cioè per $-1 \leq x \leq 1$. Non è derivabile in $x = 0$ infatti

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} \to \infty \text{ per } x \to 0$$

In questo punto la funzione ha un massimo, infatti $f(0) = 1$ e $x \neq 0$ $f(x) < 1$.



Teoremi f**ondamentali per le funzioni derivabili** in un intervallo

Teorema 10 (Teorema di Lagrange) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile almeno in* (a, b). *Allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Consideriamo i punti $A\,(a, f(a))$ e $B\,(b, f(b))$. La retta che passa per A e B ha coefficiente angolare

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ed equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

Ora consideriamo una nuova funzione data dalla differenza tra f e la funzione lineare affine di sopra e avremo

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

che ha le stesse proprietà di regolarità di f (derivabilità) e in più è tale che $g(a) = g(b) = 0$. Alla funzione g possiamo applicare il teorema di Weierstrass: esisteranno dunque due punti c e d in uno dei quali la funzione assume il suo massimo M, mentre nell'altro assume il suo minimo m. Se entrambi questi punti coincidessero con gli estremi di $[a, b]$, allora la funzione sarebbe nulla su tutto l'intervallo $[a, b]$, il grafico di f coinciderebbe con la retta e

$$f^{'}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in [a, b]$$

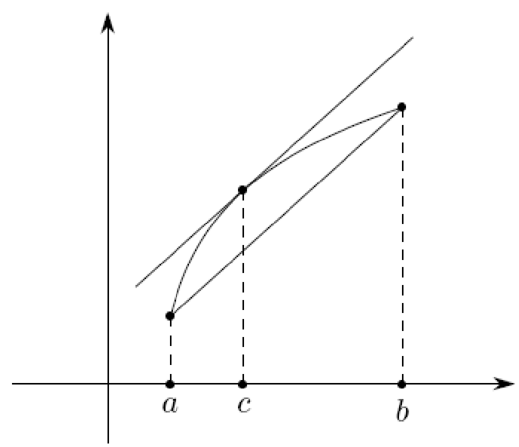
In caso contrario, almeno uno dei due punti, diciamo c, è interno all'intervallo

(a, b), allora in esso deve essere $g^{'}(c) = 0$ (per il teorema di Fermat). Poichè

$$g^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

si conclude subito la tesi.

Il grafico mostra l'interpretazione geometrica del teorema: esiste un punto interno ad $[a, b]$ dove la tangente è parallela alla secante passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

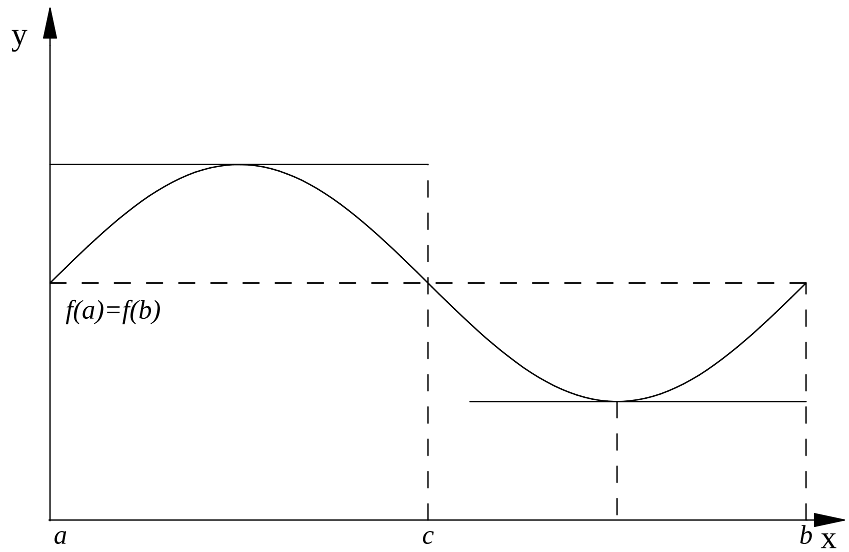


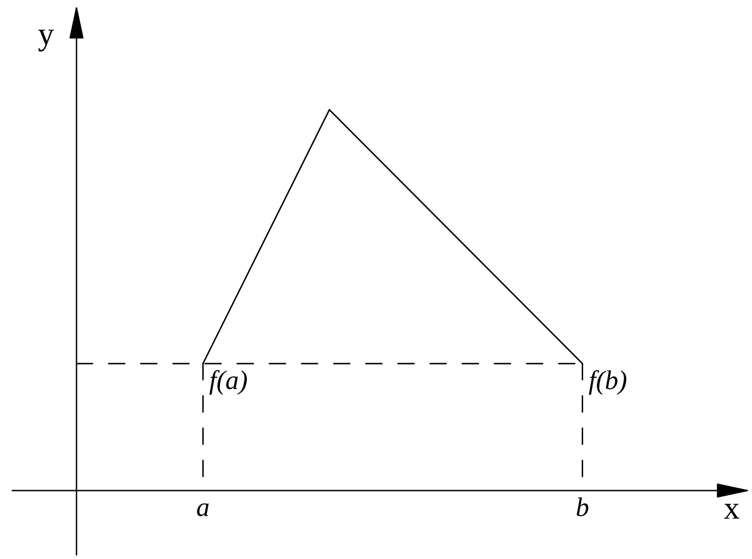
Il caso particolare $f(a) = f(b)$ del teorema del valor medio è noto come *teorema di Rolle.*

Teorema 11 (Teorema di Rolle) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile almeno in* (a, b) *con* $f(a) = f(b)$. *Allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f^{'}(c) = 0$$

Osservazione. Se un arco di curva continua è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, ed ha uguali le ordinate degli estremi, esiste almeno un punto interno all'intervallo della curva considerato dove la tangente è parallela all'asse delle x.


y
f(a)=f(b)
a
c
b
x



Se la derivata prima non esiste in qualche punto dell'intervallo, ad esempio in qualche punto angoloso, allora il punto a tangente parallela all'asse x non esiste.

Esempi. Dire se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi dell teorema di *Lagrange* nell'intervallo indicato, e in caso affermativo determinare l'ascissa del punto c (o dei punti) che verifica il teorema.

a) $f(x) = x^3 - x$ in $[-2, 2]$. La funzione è continua nell'intervallo $[-2, 2]$ e derivabile interamente ad esso. Infatti $f^{'}(x) = 3x^2 - 1$, e

$$\lim_{x \to x_0^+} f^{'}(x) = \lim_{x \to x_0^-} f^{'}(x) = l \text{ in ogni } x_0 \in [-2, 2]$$

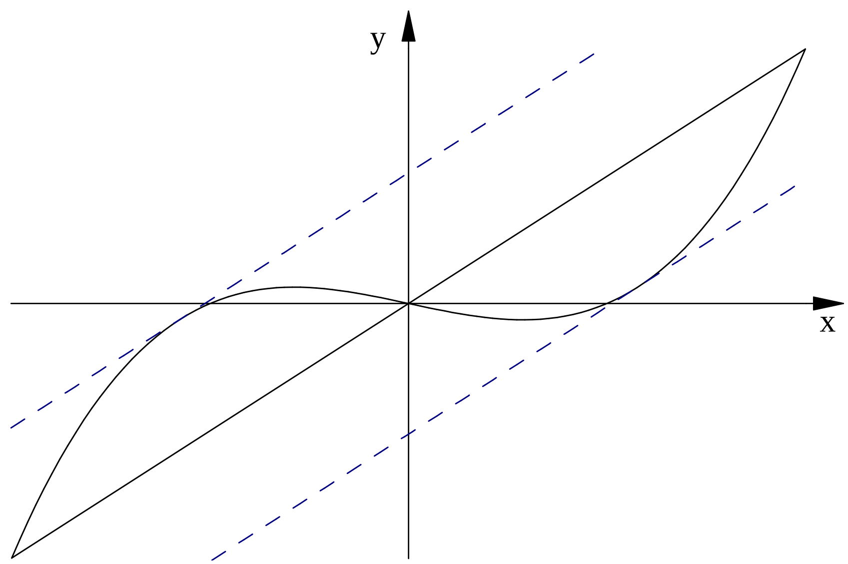
Pertanto verifica l'ipotesi del teorema di Lagrange. Quindi

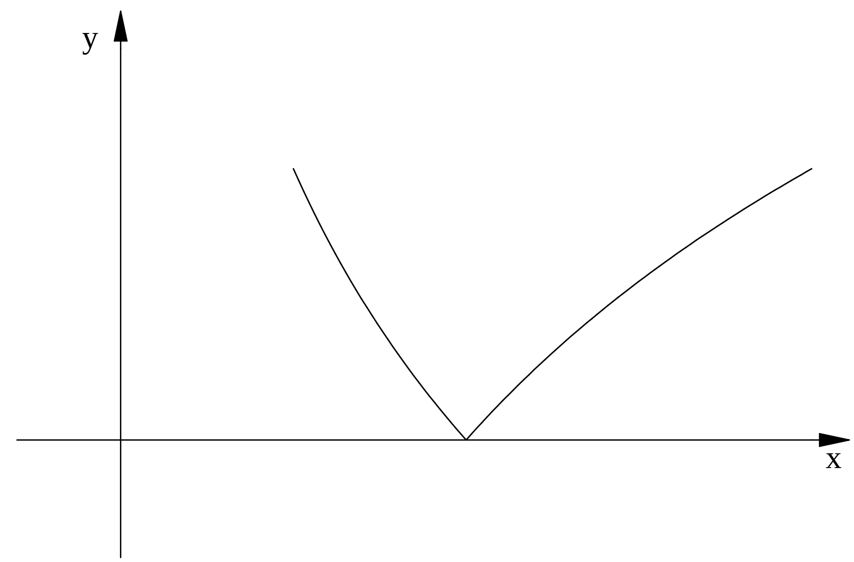
$$f^{'}(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \rightarrow 3c^2 - 1 = \frac{6 + 6}{2 + 2} = 3$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \text{ ossia } c = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ entrambi interni a } [-2, 2]$$

b) $f(x) = |\ln x|$ in $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. La funzione è continua nell'intervallo, ma non è derivabile in $x = 1$, interno a $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Infatti

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x & x \geq 1 \\ -\ln x & x < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1 \neq \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1 \text{ punto angoloso}$$





Per le applicazioni sono importantissimi i seguenti tre corollari del teorema di Lagrange.

Corollario 12 *Se f è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ e ha* **derivata** > 0 *in* $]a, b[$*, allora f è* **crescente** *in* $[a, b]$*; se ha* **derivata** < 0 *è invece* **decrescente***. Per dimostrarlo basta osservare che se prendo due punti x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, si ha*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^{'}(c) > 0 \implies f(x_2) - f(x_1)$$

il contrario se la derivata è negativa.

Corollario 13 *Se f è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ e ha* **derivata** $= 0$ *in* $]a, b[$*, è costante in* $[a, b]$*. Per dimostrarlo basta prendere* *un punto x qualunque di $[a,b]$ e osservare che si ha*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f^{'}(c)=0 \implies f(x)=f(a),$$

ovvero che $f(x)$ si trova sempre alla stessa quota di $f(a)$.

Corollario 14 *Se f e g sono due funzioni definite e continue in un intervallo $[a,b]$ e con la stessa derivata in $]a,b[$, allora la funzione $f-g$ è costante in $[a,b]$. Per dimostrarlo basta osservare che $f-g$ ha derivata nulla in $]a,b[$.*

Teorema di de Hospital

I teoremi di De Hospital consentono molto spesso di calcolare sotto certe condizioni , i limiti di funzioni che si presentano sotto forma indeterminata. Consideriamo ad esempio il caso $\frac{0}{0}$ che si presenta quando si vuole calcolare un limite

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x\to c}f(x)=f(c)=0 \text{ e } \lim_{x\to c}g(x)=g(c)=0$$

In questo caso possiamo scrivere il rapporto tra funzioni come rapporto di rapporti incrementali

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\frac{x-c}{g(x)-g(c)}$$

Passando al limite per $x \longrightarrow c$, se f e g sono *differenziabili* in c avremo

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

Teorema 15 *(***Teorema di de l'Hospital***). Siano date due funzioni f e g definite e continue in un intorno (che può essere anche solo un intorno destro o sinistro) di un punto c (eventualmente anche $\pm\infty$), derivabili almeno nei punti diversi da c, con $g^{'}(x) \neq 0$. Sia inoltre*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \; oppure \; \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$$

Se esiste $l = \lim_{x\to c} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ (finito o infinito), allora esiste anche il limite del rapporto delle due funzioni ed è proprio uguale a l

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l}$$

Esempio 16 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Possiamo applicare l'Hospital e avremo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

La regola dell'Hospital si può applicare anche più volte in successione.

Esempio 17 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Esempio 18 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{0}{0} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{H}{=} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

Esempio 19 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2\ln x}{3x^3}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{2\frac{1}{x}}{9x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{9x^3} = 0$$

Esempio 20 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} = \frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$$

a parte svolgiamo $D \cos^2 \frac{\pi x}{2}$ *funzione composta da tre funzioni:*

$$z = y^2 \quad y = \cos t \quad t = \frac{\pi x}{2} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 2y(-\sin t)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(-2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

quindi

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}\left(-2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)} = -\infty$$

Esempio 21 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty$$

Basta ricordare che

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

per essere ricondotti al caso $\dfrac{0}{0}$ *o* $\dfrac{\infty}{\infty}$. *La scelta della funzione da mettere al denominatore non è indifferente.*

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Se avessimo sbagliato la scelta della funzione da mettere al denominatore

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{-\frac{1}{x}} \text{ \textit{che porta ad una f.i.}}$$

Esempio 22 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Cercare di riportare la differenza di funzioni sotto forma di quoziente o prodotto per essere ricondotti ad un caso precedente. Infatti

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}\right) = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}\right) = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x}\right) = 0$$

Esempio 23 *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = \infty^0$$

Possiamo riscrivere

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln(\tan x)}$$

per la continuità della funzione esponenziale. Calcoliamo il limite all'esponente

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln(\tan x) = 0\cdot\infty \to \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\dfrac{1}{\tan x} \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\cos^2 x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

Si conclude che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = e^0 = 1$$

Massimi e minimi per una funzione

Abbiamo già dato la definizione di massimo e minimo relativo per una funzione. Se le disuguaglianze considerate valgono in tutto il dominio, si parla di *punto di massimo, o minimo, assoluto.*

La ricerca dei massimi e minimi relativi o assoluti per una funzione riveste grande importanza nelle applicazioni. Nel caso di funzioni derivabili, definite in un intervallo I ricordiamo che :

1. Se un punto x_0 è, per una funzione f, di *massimo o minimo relativo* interno ad I, allora $f^{'}(x_0) = 0$;

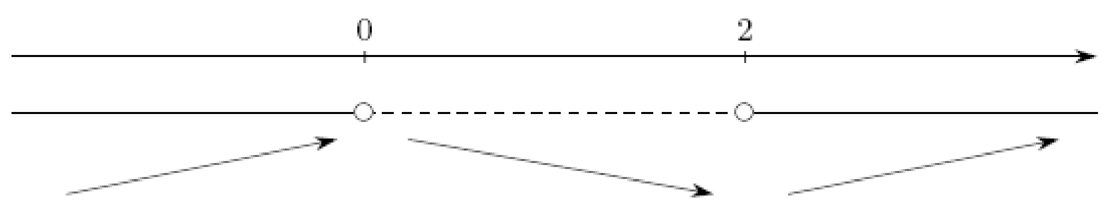
2. Se una funzione è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0, x_0 è di massimo relativo.

3. Se una funzione è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0, x_0 è di minimo relativo.

Esempio 24 *Per la funzione* $f(x) = x^3 - 3x^2$ *il dominio è tutto* $\mathbb{R}$. *Si ha* $f^{'}(x) = 3x^2 - 6x$. *Studiamo il segno della derivata*

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 6x \geq 0 \rightarrow 3x(x-2) \geq 0$$

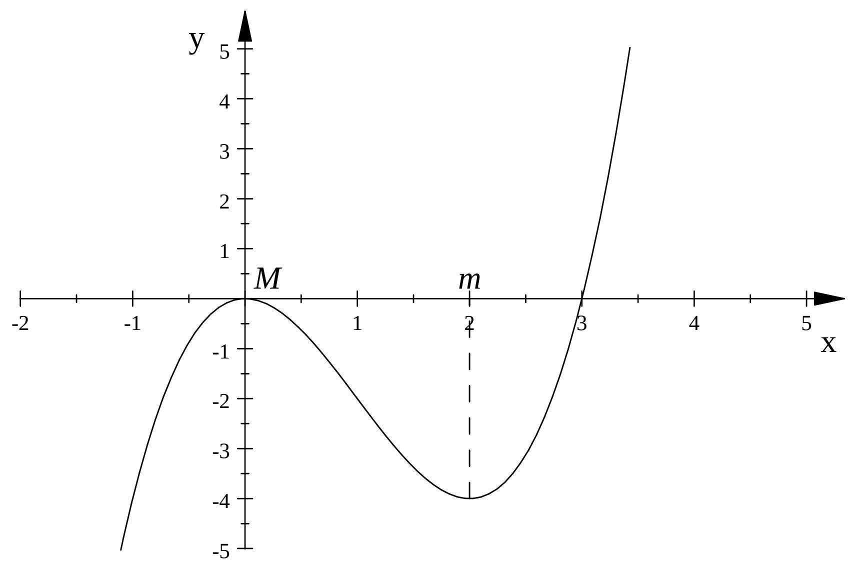
da cui $f^{'}(x) > 0$ *per* $x < 2$ *e* $x > 0$ *mentre è negativa in* $(0, 2)$. *La derivata prima si annulla in* $x = 2$ *e* $x = 0$.*Riporteremo questi risultati in un grafico come il seguente.*



Se consideriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -4$$

non ci sono asintoti orizzontali. Non ci sono neanche asintoti obliqui. L'andamento del grafico della funzione $x^3 - 3x^2$ *è riportato sotto. I punti* $x = 0$ *e* $x = 2$ *sono rispettivamente punti di* **massimo e minimo relativo**. *Non esistono punti di massimo o minimo assoluto. Infatti la funzione è illimitata.*



Osservazione 25 *Finora abbiamo elencato le condizioni sufficienti per garantire che un punto* x_0 *(che deve essere un punto critico), interno ad un intervallo* $[a, b]$ *dove la funzione sia continua e derivabile, sia un* **estremo relativo.** *Per fare ciò si richiede l'esame della derivata prima,* $f^{'}(x)$ *in un intorno di* x_0 *. Accanto a questo criterio di carattere "locale" conviene considerarne un altro, anch'esso sufficiente ma di carattere "puntuale" e che richiede l'esistenza delle derivate successive nel punto* x_0 *.*

Teorema 26 *Sia* f *definita in* (a, b)*, derivabile due (tre) volte in* x_0*. Si abbia inoltre che* $f^{'}(x_0) = 0$*. Se*

$$\begin{cases} f^{''}(x_0) > 0 & \textit{allora } x_0 \textit{ è un punto di mimimo relativo (forte)} \\ f^{''}(x_0) < 0 & \textit{allora } x_0 \textit{ è un punto di mimimo relativo (forte)} \end{cases}$$

nell'ipotesi in cui $f^{''}(x_0) = 0$ *e* $f^{'''}(x_0) \neq 0$ *allora* x_0 *non è un punto ne di minimo ne di massimo relativo (ci sarà un flesso che sarà a tangente orizzontale* ascendente o discendente a seconda che risulti rispettivamente $f^{'''}(x_0) > 0$ o $f^{'''}(x_0) < 0$). Nel caso in cui anche la $f^{'''}(x_0) = 0$,si passa a calcolare le derivate successive in x_0.Il procedimento si arresta se si incontra una derivata che non si annulla in x_0. Se essa è di odine pari allora avremo un massimo o minimo relativo a seconda del segno della derivata. Mentre se è di ordine dispari avremo un flesso.

Esempio 27 *Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione* $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$. *Abbiamo*

$$f^{'}(x) = 12x^2 - 18x + 6 \;\; e \;\; f^{''}(x) = 24x - 18$$

Poichè $f^{'}(x)$ *esiste per ogni valore della* x, *i valori della* x *che annullano la derivata prima solo*

$$f^{'}(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 0 \text{ per } x = 1 \text{ e } x = 1/2$$

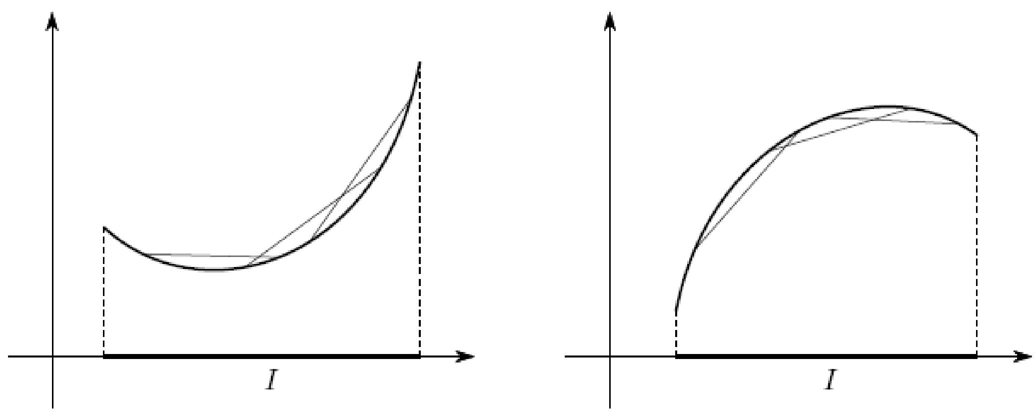
Essendo:

- $f^{''}\left(\frac{1}{2}\right) = -6 < 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ *è un punto di* **massimo relativo** *per* $f(x)$;

- $f^{''}(1) = 6 > 0 \qquad \rightarrow x = 0$ *è un punto di* **minimo relativo** *per* $f(x)$.

Funzioni convesse e concave

Abbiamo già definito geometricamente una funzione f *convessa* in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ richiedendo che presi due punti qualsiasi del grafico di f il segmento congiungente questi due punti si trovi sopra il grafico stesso o possa al massimo coincidere con un suo tratto. Se il grafico di una funzione convessa non contiene tratti rettilinei allora la funzione si dice *strettamente convessa.* Una funzione è *concava*, o *strettamente concava*, quando se $-f$ è convessa o strettamente convessa (funzioni di utilità).



Per le funzioni derivabili due volte è possibile decidere se sono convesse o concave: attraverso lo studio della monotonia della derivata prima si può riconoscere la concavità o convessità di una funzione.

Teorema 28 *Sia f due volte derivabile in un intervallo (a, b). Allora le tre condizioni sono equivalenti:*

$$\boxed{f \text{ convessa,}} \qquad \boxed{f' \text{ crescente,}} \qquad \boxed{f'' \geq 0.}$$

Nelle funzioni *concave,* f' decrescente e $f'' \leq 0$.

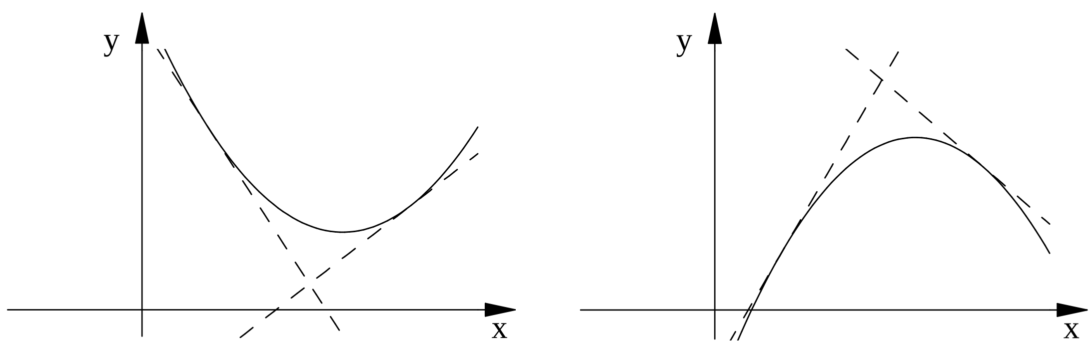
Osservazione 29 *Se una funzione è convessa e tracciamo la retta tangente al grafico in un punto qualunque, essa sta sempre sotto; al più se la funzione presenta tratti rettilinei, la tocca oltre che nel punto di tangenza anche in tutto questo tratto. La retta tangente al grafico di f in un punto x_0 ha equazione*

$$y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Se f è convessa allora il suo grafico non andrà mai sotto tale retta; cioè

$$f(x) \geq f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

per ogni $x, x_0 \in (a, b)$. Per le funzioni concave basta rovesciare l'uguaglianza.



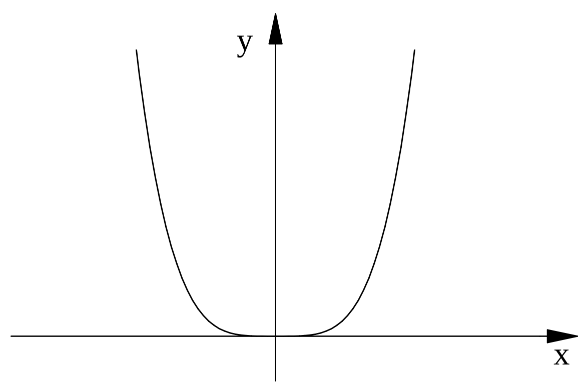
Teorema 30 *Se x_0 è un punto stazionario per f, convessa (concava) in (a, b), allora x_0 è punto di minimo (massimo) assoluto e $f(x_0)$ è il minimo (massimo) valore assunto da f in tutto (a, b).*

Questa proprietà rende estremamente utili le funzioni convesse (concave) nella teoria dell'ottimizzazione e nelle applicazioni economiche.

PUNTI DI FLESSO

Definizione 31 *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I e x_0 un punto di I. Se esistono due intervalli del tipo $[x_1, x_0]$ e del tipo $[x_0, x_2]$ tali che la funzione sia convessa nel primo e concava nel secondo, oppure concava nel primo e convessa nel secondo, allora il punto x_0 si dice* **punto di flesso** *per il grafico di f (punto in cui cambia la concavità di f). La tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ si dice tangente inflessionale.*

Se una funzione è derivabile due volte, la sua derivata seconda $f^{''}(x_0) = 0$ in un punto di flesso. La condizione di annullamento della derivata seconda in un punto x_0 non implica però automaticamente che x_0 debba essere di flesso. Ad esempio $f(x) = x^4$ ha $f^{''}(0) = 0$ ma $x = 0$ non può essere di flesso perchè la funzione è convessa in tutto $\mathbb{R}$.



Per scoprire se il punto x_0 nel quale si annulla la derivata seconda è un punto di flesso bisogna esplorare il segno di $f^{''}(x)$ a sinistra e a destra di x_0. Se i segni sono diversi si tratta di un flesso altrimenti no.

Esempio 32 *Determinare i massimi, i minimi, i flessi e gli intervalli di crescenza, decrescenza, concavità, convessità della funzione.*

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Inanzitutto il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$ *perchè* $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. *Cominciamo con il calcolare le derivate prima e seconda di* f

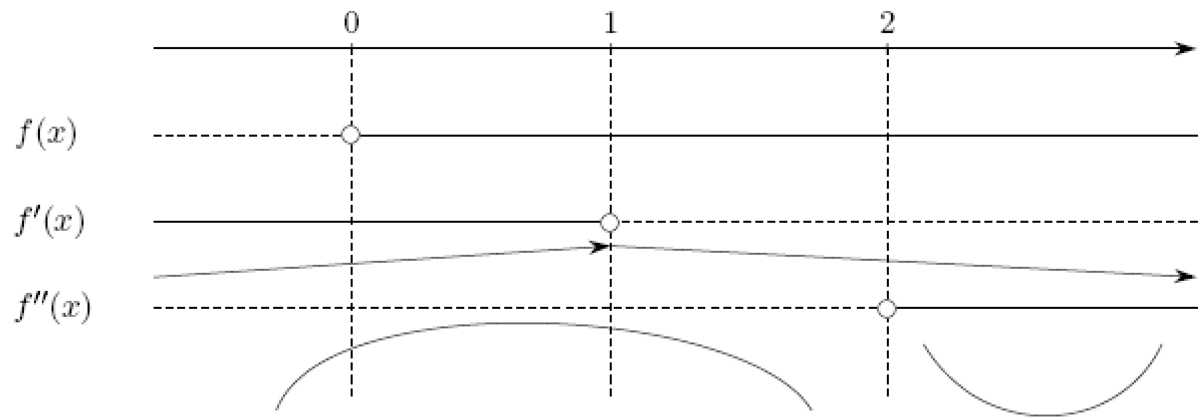
$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)}{e^x}; \\ f^{''}(x) &= \frac{-e^x - (1-x)\,e^x}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x} \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata prima $f^{'}(x) = \dfrac{(1-x)}{e^x} > 0$ *che è positiva (funzione crescente) per* $x < 1$, *negativa (funzione decrescente) per* $x > 1$ *e si annulla (tangente orizzontale) per* $x = 1$, *dove avrà un punto di massimo (relativo) in quanto è prima crescente e poi decrescente. L'ordinata del punto* *di massimo (massimo relativo ma anche assoluto in quanto la funzione non supera mai questo valore) sarà* $f(1) = \frac{1}{e}$*, quindi*

$$\boxed{M(1, \frac{1}{e})}$$

Studiando il segno della derivata seconda $f''(x) = \frac{x-2}{e^x} > 0$ *si ha invece che è positiva (funzione convessa) per* $x > 2$*, negativa (funzione concava) per* $x < 2$*, nulla per* $x = 2$*, dove ha un punto di flesso in quanto a sinistra di 2 è concava, a destra è convessa. Le coordinate del flesso saranno*

$$\boxed{F\left(2, 2/e^2\right)}$$



Per calcolare la tagente inflessionale dobbiamo trovare il coefficiente angolare della retta come derivata nel punto di flesso

$$f^{'}(2) = -\frac{1}{e^2}$$

per cui l'equazione della tangente inflessionale sarà :

$$y - f(2) = f^{'}(2)(x-2) \Longrightarrow y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$$

Per raffinare ulteriormente le informazioni a nostra disposizione relative al grafico di f calcoliamo anche i limiti per $x \to \pm\infty$ per sapere "da dove parte" e "dove arriva" il grafico della funzione.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \text{ \textit{La retta} } y = 0 \text{ \textit{è asintoto orizzontale dx}}$$

Controlliamo l'esistenza di un asintoto obliquo a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ \textit{non esistono asintoti obliqui}}$$

Inoltre è utile sapere se dove la funzione è positiva e dove no. Basta studiare il segno di $f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{e^x} > 0 \text{ \textit{quando} } x > 0$$

L'unica intersezione con gli assi è l'origine $(0,0)$.

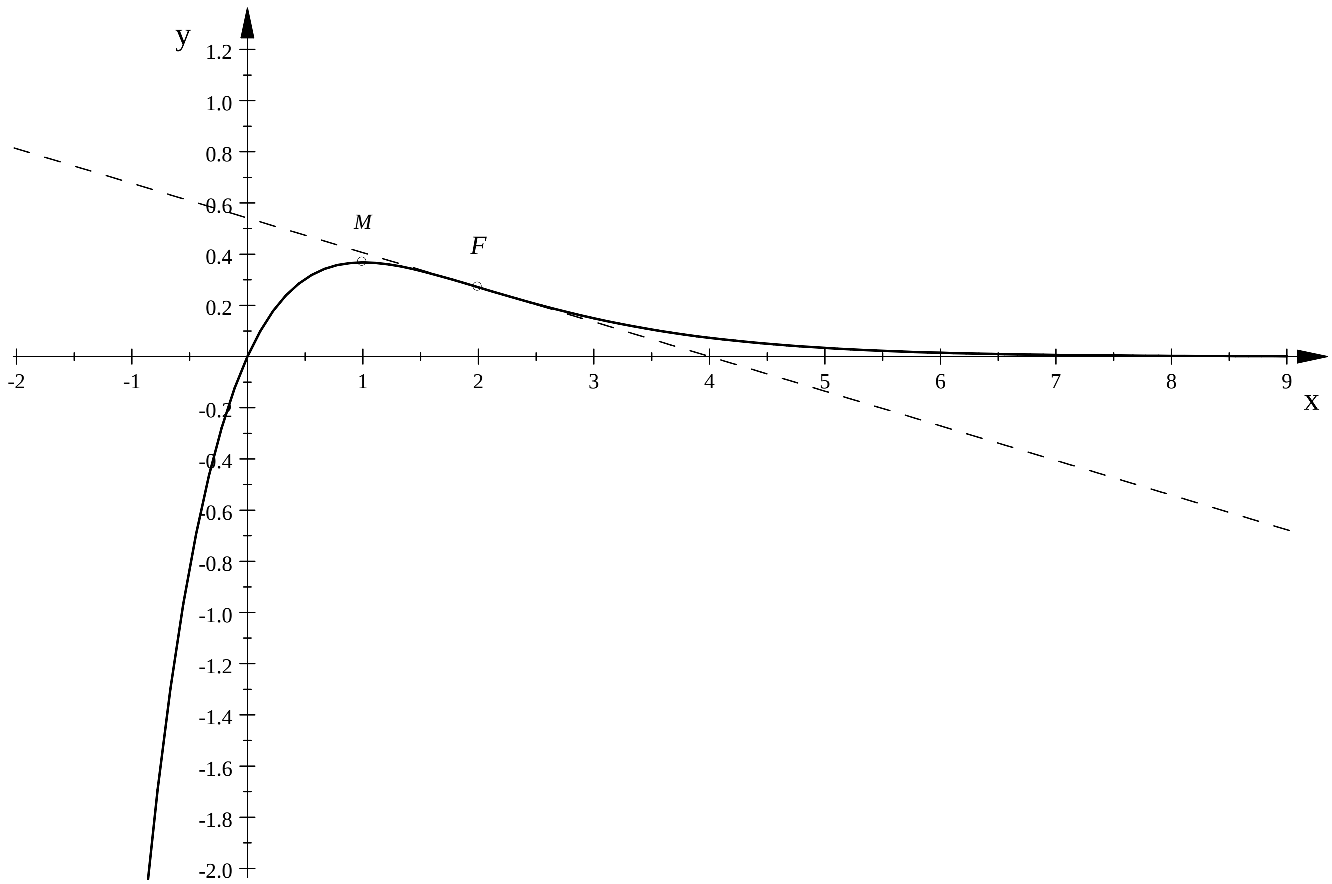


Grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

RIEPILOGO SU COME DISEGNARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Data una funzione f, per tracciarne il grafico si procede con il seguente schema.

1. Si determina il dominio naturale.

2. Si calcolano le eventuali intersezioni con gli assi.

3. Si verifica quando la funzione è positiva, quando è negativa.

4. Si determinano tutti gli eventuali asintoti (compresi gli eventuali obliqui).

5. Si calcola la derivata prima e si deducono gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e, di conseguenza, i massimi e minimi (assoluti e/o relativi).

6. Si calcola la derivata seconda e si deducono gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa e, di conseguenza, i flessi (eventualmente tangente inflessionale).

7. Si calcola esplicitamente il valore della funzione in qualche punto notevole.

8. Si riportano i risultati su un grafico che deve esplicitare tutti i risultati trovati.

Schema riassuntivo dei punti critici

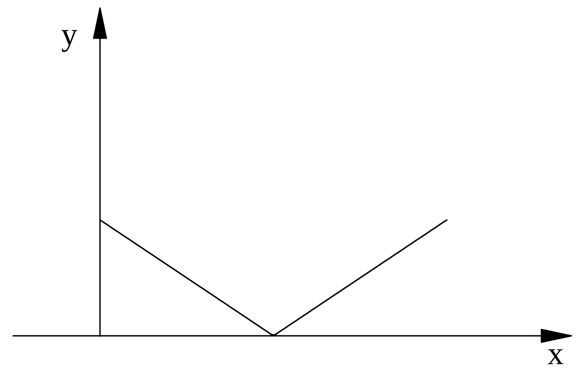
Un punto x_0 è detto critico se $f'(x_0) = 0$ (*punto stazionario)* oppure se in esso *non* esiste la derivata prima.

Punti stazionari: $f'(x_0) = 0$. In tal caso il punto è:

- un *punto di massimo* o di *minimo* oppure un *flesso* a tangente *orizzontale.*

Non esiste la derivata prima in x_0 pur essendo la funzione continua in x_0. Ciò può avvenire per diversi motivi:

1. Se $f'_+(x_0) = l \neq m = f'_-(x_0)$ allora (x_0) è un *punto angoloso.* Si ha un punto angoloso anche se una delle due derivate è infinita.



2. Se

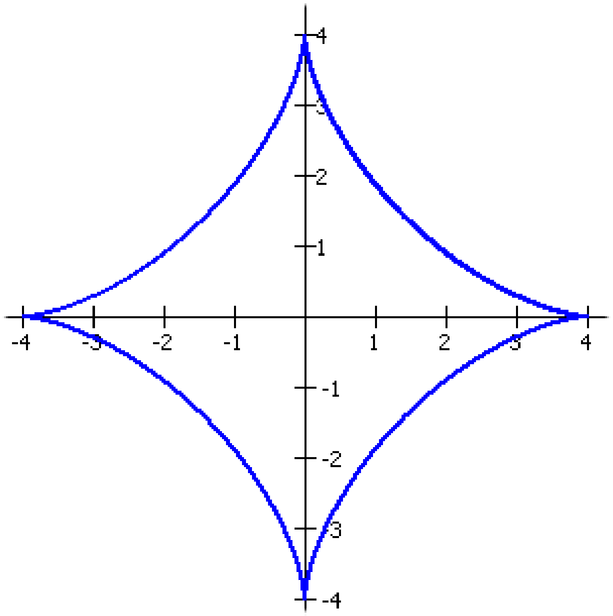
$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \;=\; +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty \text{ allora } x_0 \text{ è una \textit{cuspide}}$$

con vertice rivolto verso l'alto.

Se

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \;=\; -\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty \text{ allora } x_0 \text{ è una } \textit{cuspide}$$

con vertice rivolto verso il basso.

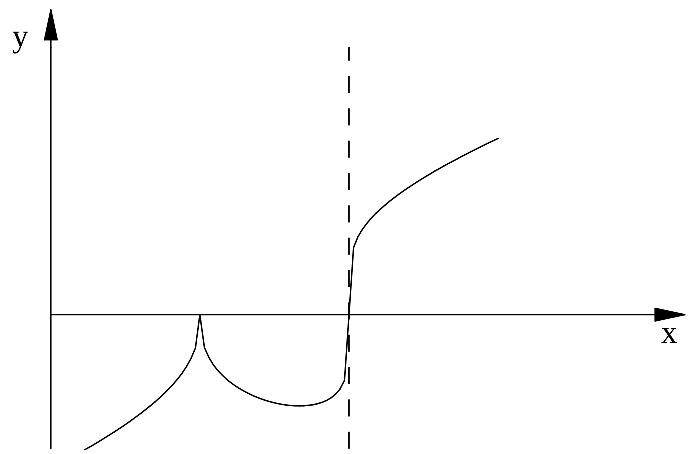


3. Se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$$ allora x_0 è una *flesso* a tangente veritcale ascendente.

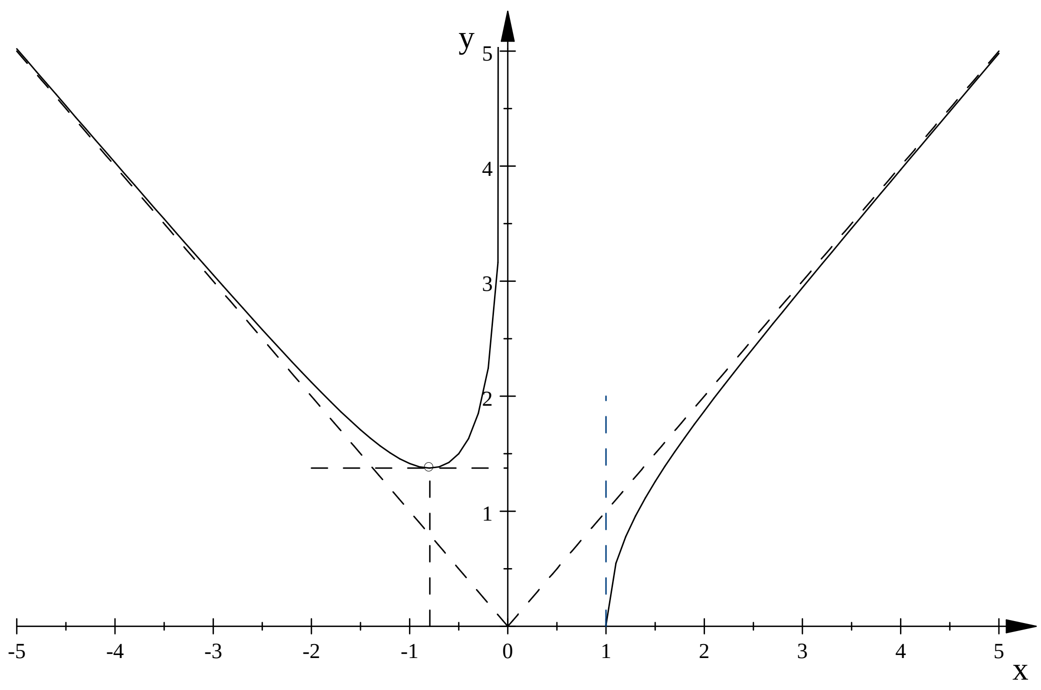
Se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$$ allora x_0 è una *flesso* a tangente veritcale discendente.

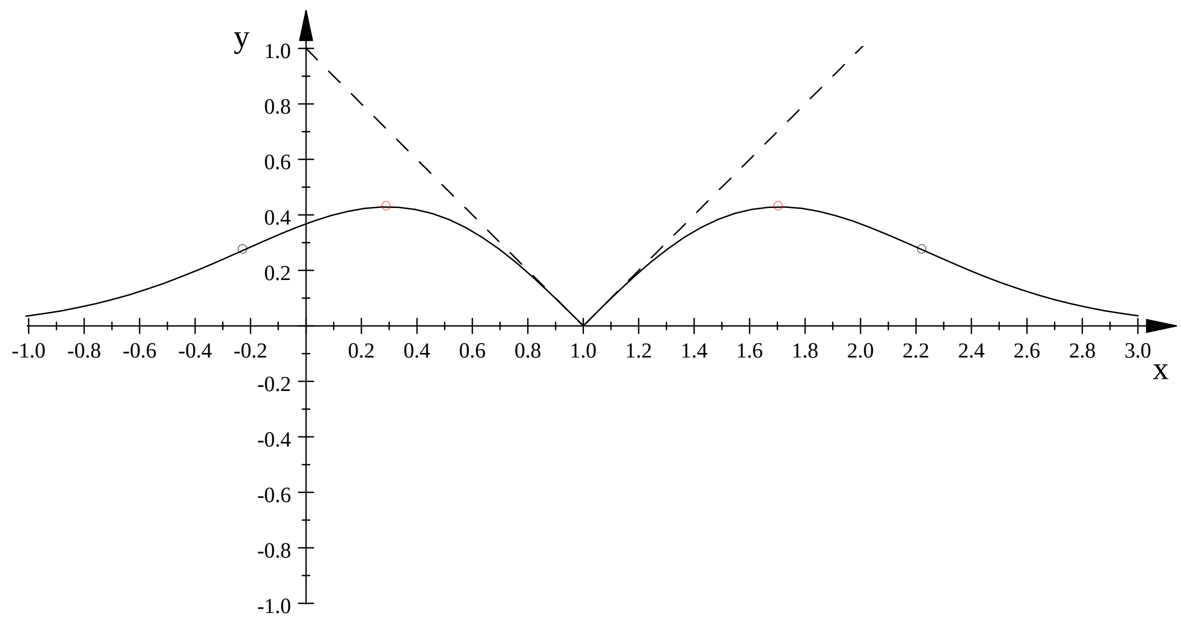


Studiare le seguenti funzioni

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x}}$



2. $f(x) = |x-1|\, e^{-(x-1)^2}$



y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0
x