

$$C = rK + wL$$

Minimizzazione dei costi di produzione
con una funzione di produzione Cobb-Douglas

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$\min_{K, L} rK + wL \quad \text{s.t.} \quad \bar{Y} = AK^\alpha L^{1-\alpha} \quad \left[\text{Problema di minimizzazione vincolata} \right]$$

Dalla funzione di produzione ricaviamo K:

$$K^\alpha = \frac{\bar{Y}}{A} L^{\alpha-1} \Rightarrow K = \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad (1)$$

Il problema di minimizzazione può essere riscritto:

$$\min_L r \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + wL \quad \left[\text{Problema di minimizzazione libera} \right]$$

$$\text{F.O.C.} \quad \frac{\alpha-1}{\alpha} r \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-1} + w = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} r \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{-\frac{1}{\alpha}} = w \Leftrightarrow$$

$$L^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow L^* = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^\alpha \frac{\bar{Y}}{A} \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1)

$$K = \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^\alpha \frac{\bar{Y}}{A} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \left(\frac{\bar{Y}}{A} \right)^{\frac{1+\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^{\alpha \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha}} \Rightarrow K^* = \frac{\bar{Y}}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^{\alpha-1} \quad (3)$$

Sostituendo i valori ottimali di K^* (3) e di L^* (2) nella funzione dei costi,

$$C = rK^* + wL^* = r \frac{\bar{Y}}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{r}{w} \right)^{\alpha-1} + w \frac{\bar{Y}}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{r}{w} \right)^\alpha =$$

$$= \frac{\bar{Y}}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{r}{w} \right)^\alpha \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w}{r} + w \right] = \frac{\bar{Y}}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{r}{w} \right)^\alpha \left(\frac{\alpha+1-\alpha}{1-\alpha} w \right) =$$

$$= \frac{\bar{Y}}{A} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha r^\alpha w^{1-\alpha} \frac{1}{1-\alpha} = \alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} r^\alpha w^{1-\alpha} \frac{\bar{Y}}{A}$$

$$C^*(r, w, Y) = \alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} r^\alpha w^{1-\alpha} \frac{\bar{Y}}{A}$$