Teoria dei Giochi

Alessandro Scopelliti

Università di Reggio Calabria – University of Warwick

alessandro.scopelliti@unirc.it

TEORIA DEI GIOCHI

La **teoria dei giochi non cooperativi** studia i processi decisionali in situazioni in cui i **comportamenti strategici** sono rilevanti.

Le situazioni di interazione strategica vengono dette **giochi**.

Un decisore **si comporta strategicamente** quando prende in considerazione quello che ritiene che gli altri agenti faranno.

Questi giochi vengono definiti “non cooperativi” perché ciascun soggetto che vi partecipa agisce unicamente per il proprio tornaconto; questo non significa che la cooperazione non possa essere un risultato del comportamento strategico.

Una caratteristica importante nell’interazione fra più agenti è la presenza di **interdipendenza strategica**.

In situazioni di interdipendenza strategica ogni agente capisce che le vincite che riceve (espresse in termini di utilità o profitto) non dipende solamente dalle sue azioni, ma anche dalle azioni degli altri agenti.

Nel suo processo decisionale, ogni agente dovrebbe considerare:

1) le azioni che gli altri agenti hanno **già scelto**;

2) le azioni che si **aspetta** che loro scelgano **contemporaneamente**;

3) le **azioni future** che loro possono (o no) scegliere **come conseguenza** delle sue azioni nel presente.

Elementi di un gioco

Per descrivere una situazione di interdipendenza strategica, servono quattro elementi fondamentali:

i) **Giocatori**: i decisori nel gioco (*chi è coinvolto?*)

ii) **Azioni**: le azioni possibili, o mosse, che i giocatori possono scegliere (*che cosa possono fare?*)

iii) **Strategie**: i piani d’azione dei giocatori *(che cosa hanno intenzione di fare?*)

iv) **Vincite**: i possibili guadagni che i giocatori ottengono (*che cosa guadagnano?*)

Strategia

Una **strategia** è un **piano completo e contingente**, o **regola decisionale**, che specifichi come il giocatore deve agire in

OGNI POSSIBILE CIRCOSTANZA

in cui **potrebbe** essere chiamato a decidere.

Intuizione: quando un giocatori specifica la sua strategia, è come se dovesse scrivere un **libro di istruzioni** prima di giocare così che un rappresentante possa decidere a nome suo semplicemente consultando quel libro.

Essendo un piano contingente completo, una strategia spesso definisce che azione deve scegliere un giocatore in circostanze che possono **non essere raggiunte** durante l’effettivo svolgimento del gioco.

Alcune definizioni

I giochi in cui tutti i giocatori muovono simultaneamente sono detti **giochi simultanei**.

I giochi in cui le mosse dei giocatori possono essere una prima dell'altra sono detti **giochi sequenziali**, o **dinamici**.

I giochi in cui tutti i giocatori muovono sapendo le mosse precedenti o simultanee degli altri giocatori sono detti **giochi a informazione perfetta**.

I giochi in cui alcuni giocatori devono muovere senza conoscere le mosse precedenti o simultanee degli altri giocatori sono detti **giochi a informazione imperfetta**.

I giochi simultanei sono *generalmente* giochi a informazione imperfetta, mentre i giochi sequenziali sono *generalmente* giochi a informazione perfetta.

Esempio 1: il dilemma del prigioniero

Due ladri vengono arrestati dalla polizia e vengono messi in stanze **separate** per l’interrogatorio; il procuratore distrettuale ha prove sufficienti per dimostrare che i due sono colpevoli di un reato minore, ma per infliggere una pena più pesante avrebbe bisogno di più prove.

Il procuratore distrettuale e il suo assistente vanno **contemporaneamente** dai due ladri offrendo a ognuno uno sconto di pena se accetta di testimoniare contro l’altro (in tal caso la pena per quest’ultimo aumenterà)

Ogni ladro deve scegliere quindi fra **“confessare”** o **“tacere”**, **senza sapere** che cosa stia scegliendo l’altro.

Se solo uno dei due ladri confessa, questi sarà **rilasciato**, mentre quello che non ha confessato andrà in carcere per **20 anni**.

Se entrambi confessano, avranno una pena di **5 anni**.

Se entrambi tacciono, saranno entrambi imprigionati per un crimine minore che comporta una pena di **1 anno**.

Ogni giocatore vuole minimizzare il tempo da trascorrere in carcere, quindi possiamo rappresentare i payoff come il negativo di queste quantità.

Questo è un gioco simultaneo con informazione imperfetta, dato che ogni giocatore deve muovere senza conoscere la mossa simultanea dell’altro giocatore.

Per rappresentare il dilemma del prigioniero, abbiamo bisogno degli elementi fondamentali introdotti prima:

i) **Giocatori**: i due ladri, *X* e *Y*

ii) **Azioni**: confessare (*C*) o tacere (*NC*)

Il dilemma del prigioniero è un gioco **simultaneo** in cui i giocatori muovono **una volta sola**; quindi:

iii) **Strategie**: confessare (*C*) o tacere (*NC*)

In questo caso particolare, **strategie = azioni**! Questo non è sempre vero!!!

iv) **Vincite**: l’opposto del tempo passato in prigione.

Esempio 2: l'oligopolio con libertà di entrata

L'impresa *X* sta valutando se entrare in un mercato in cui al momento opera solamente un'impresa, *Y*. Se *X* entra, *Y* può reagire in uno dei seguenti modi:

i) **essere accomodante**, rinunciando a parte delle vendite, cioè può produrre **poco**.

ii) **essere aggressivo**, ingaggiando una guerra sui prezzi, cioè può produrre **tanti**.

Se *X* resta fuori dal mercato, non ha profitti, mentre *Y* guadagna 2 se produce poco e 3 altrimenti.

Se *X* entra nel mercato e *Y* è aggressivo, guadagnano entrambi -1; se *Y* invece è accomodante l'entrante, entrambi prendono 1

Questo è u gioco sequenziale con informazione perfetta.

Per rappresentare questo gioco di entrata, abbiamo bisogno dei seguenti elementi fondamentali:

i) **Giocatori**: le due imprese, *X* e *Y*

ii) **Azioni**: per *X*, entrare (*E*) e non entrare (*NE*); per *Y*, produrre poco (*P*) e produrre tanto (*T*)

Il gioco di entrata è un gioco **sequenziale** in cui *Y* muove dopo *X*, conoscendo le scelte di quest'ultimo.

iii) **Strategie**:

per *X*: entrare (*E*) e non entrare (*NE*) (strategie=azioni!)

per *Y*: (1) scegliere sempre *P*; (2) scegliere *P* se *X* entra, e *T* altrimenti; (3) scegliere *T* se *X* entra, e *P* altrimenti; (4) scegliere sempre *T*

iv) **Vincite**: i profitti.

Ricorda: una strategia è un piano di azioni completo e contingente che specifica come il giocatore deve giocare in **ogni possibile circostanza** in cui potrebbe essere chiamato a giocare.

Il giocatore *X* muove solo **una** volta, e ha due azioni a disposizione: quindi per *X* **strategie = azioni**!

Il giocatore *Y*, invece, sarà chiamato a giocare in **due** diverse situazioni: una in cui *X* ha scelto *E*, e una in cui *X* ha scelto *NE*.

Una strategia per *Y* deve specificare come il giocatore si comporterà in ognuna delle due circostanze, cioè deve definire una delle due azioni disponibili (*P* or *T*) in ogni situazione.

Due situazioni * **due** azioni = **quattro** possibili strategie!

Rappresentazione dei giochi

I giochi possono essere rappresentati in due modi, in **forma normale** e in **forma estesa**.

La forma normale

La **forma normale** definisce il gioco direttamente in termini di strategie e delle vincite associate.

Quando si descrive un gioco con la sua forma normale, non c'è bisogno di tener conto delle specifiche mosse associate a ogni strategia.

La rappresentazione in forma normale si basa sull'idea che il problema decisionale del giocatore può essere pensato come quello di scegliere una strategia data la strategia che si **pensa** i rivali stiano adottando.

Il dilemma del prigioniero in forma normale

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

La **matrice dei payoff** riassume le vincite associate a ogni combinazione di strategie.

Si noti che la forma normale è utile praticamente solo quando ci sono due giocatori e l'insieme delle possibili strategie è limitato.

Il gioco d’entrata in forma normale

		Y (i)	(ii)	(iii)	(iv)
X	E	1 , 1	1 , 1	-1 , -1	-1 , -1
	NE	0 , 2	0 , 3	0 , 2	0 , 3

$$\begin{cases} \text{i) P if E , P if NE} \\ \text{ii) P if E , T if NE} \\ \text{iii) T if E , P if NE} \\ \text{iv) T if E , T if NE} \end{cases}$$

La forma estesa

La **forma estesa** riesce a rappresentare chi muove in un determinato momento, che azioni ogni giocatore può scegliere, che cosa i giocatori sanno quando muovono, qual è il risultato come funzione delle azioni scelte dai giocatore, e le possibili vincite dei giocatori da ogni possibile risultato.

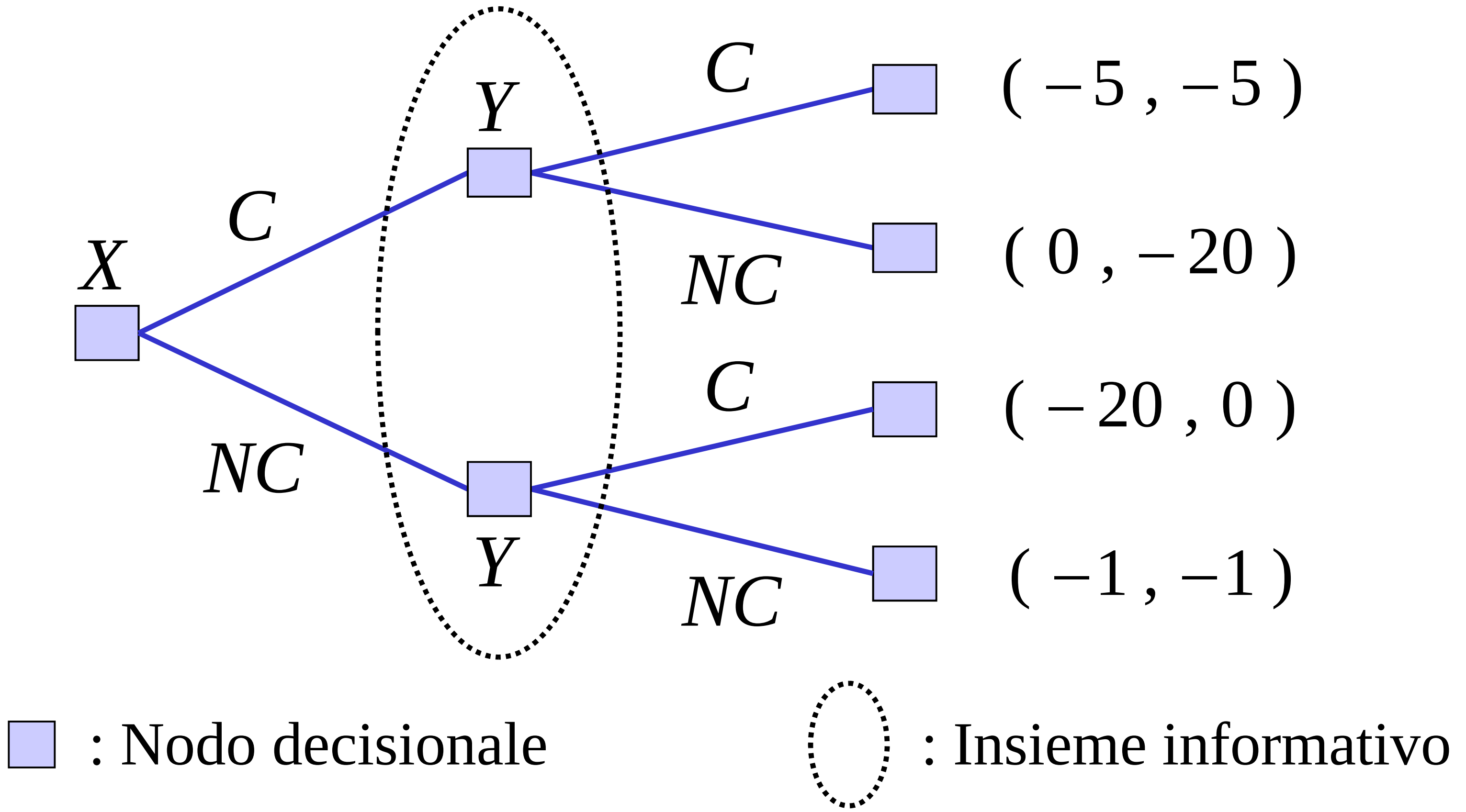
La forma estesa si basa su uno strumento concettuale detto **albero del gioco**.

Le situazioni in cui gli agenti sono, o potrebbero essere, chiamati a muovermi sono rappresentate dai **nodi decisionali** (quadratini grigi)

Ognuna delle scelte disponibili in un certo nodo decisionale è rappresentata da un **ramo** che parte dal nodo decisionale stesso.

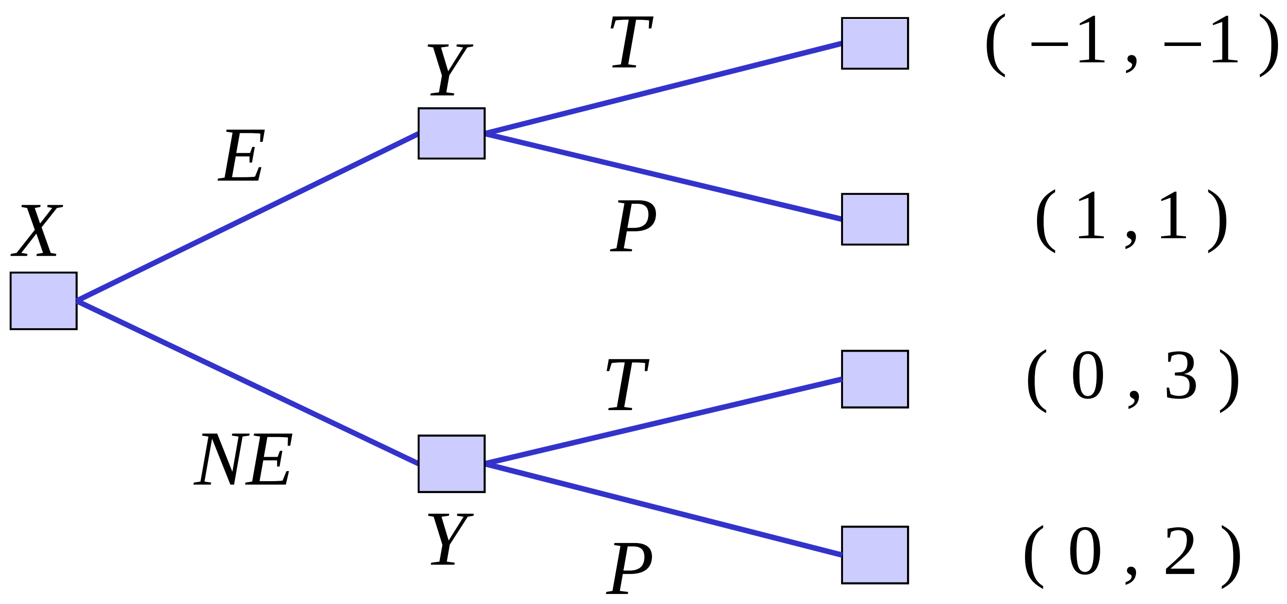
L'albero del gioco ha un unico sentiero di rami continuo dal nodo iniziale a ogni nodo nel gioco.

Il dilemma del prigioniero in forma estesa



L'ovale tratteggiato attorno ai due nodi decisionali di *Y*, detto **insieme informativo**, è usato per rappresentare l'**incapacità** di *Y* a distinguere fra i due punti nel momento in cui prende la decisione; dal punto di vista di *Y*, l'intero insieme informativo è un singolo nodo decisionale.

Il gioco d’entrata in forma estesa



Il gioco d’entrata è un gioco con **informazione perfetta**, cioè il giocatore *Y* osserva la mossa di *X* prima di muovere: quindi *Y* potrebbe essere chiamato a muovere in due diverse situazioni (che lui è in grado di distinguere) e quindi affronta **due distinti** nodi decisionali.

La forma normale e quella estesa sono due facce della stessa medaglia, e rappresentano lo stesso gioco: comunque, ogni forma può essere particolarmente utile in specifiche applicazioni.

L’equilibrio in strategie dominanti

Una **strategia dominante** è una strategia che garantisce vincite **almeno pari** a quelle di qualsiasi altra strategia, **indipendentemente** da quello che fanno gli altri giocatori.

Una **strategia strettamente dominante** è la **migliore** strategia indipendentemente da quello che fanno gli altri giocatori.

Non c’è ragione perché i giocatori non usino la loro strategia dominante, **SE** ne hanno una (spesso non esistono strategie dominanti)

Quindi quando **ogni** giocatore ha strategie dominanti, l’unico equilibrio **ragionevole** è che ogni giocatore usi la propria strategia dominante.

Un **equilibrio in strategie dominanti** è il risultato in un gioco in cui ogni giocatore segue una strategia dominante.

Strategie dominanti nel dilemma del prigioniero

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

X ha una strategia dominante?
Sì, giocare **"C"** è sempre la risposta migliore alle mosse di *Y* (-5 > -20 e 0 > -1)

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

Y ha una strategia dominante?
Sì, giocare **"C"** è sempre la risposta migliore alle mosse di *X* (-5 > -20 e 0 > -1)

NB: giocare ***C*** è dominante per **entrambi** i giocatori! Quindi **{*C*,*C*}** è un **equilibrio in strategie dominanti** per il dilemma del prigioniero.

L’equilibrio di Nash

L’**equilibrio di Nash** è il concetto di soluzione più ampiamente utilizzato nelle applicazioni della teoria dei giochi all’economia.

Consideriamo un gioco con due giocatori, *X* and *Y*; una coppia di strategie formano un **equilibrio di Nash** se:

i) la strategia scelta da *X* è **ottimale** data la strategia **effettivamente** scelta da *Y*

E

ii) la strategia scelta da *Y* è **ottimale** data la strategia **effettivamente** scelta da *X*

In generale, in un equilibrio di Nash la strategia scelta da ogni giocatore è la sua **risposta ottimale** alle strategie **effettivamente** scelte dagli altri giocatori.

Nei giochi simultanei con informazione imperfetta, i giocatori non possono osservare direttamente le mosse dei rivali.

Quindi ogni giocatore forma delle congetture su quello che gli altri faranno, e reagisce di conseguenza scegliendo la sua risposta migliore alle congetture che si è formata.

In un equilibrio di Nash, queste congetture **sono corrette**: la strategia di ogni giocatore si rivela come la migliore risposta alle reali mosse dei rivali.

In altre parole, in un equilibrio di Nash i giocatori formano congetture **reciprocamente corrette**.

Quindi i giocatori non hanno incentivi per deviare **unilateralmente** dall'equilibrio una volta che le mosse dei rivali sono diventate osservabili.

L'equilibrio di Nash e il dilemma del prigioniero

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

Se *Y* sceglie ***C***, la miglior risposta per *X* è giocare ***C*** (-5 > -20)

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

Se *X* sceglie ***C***, la miglior risposta per *Y* è giocare ***C*** (-5 > -20)

Quindi **{*C*,*C*}** non è solo un equilibrio in strategie dominanti, ma è anche un **equilibrio di Nash** per il dilemma del prigioniero.

NB: tutti gli equilibri in strategie dominanti sono equilibri di Nash (per definizione), ma non viceversa.

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

Se *Y* sceglie ***NC***, la miglior risposta per *X* è giocare ***C*** (0 > -1)

		Y	
		C	*NC*
X	*C*	-5 , -5	0 , -20
	NC	-20 , 0	-1 , -1

Se *X* sceglie ***C***, la miglior risposta per *Y* è giocare ***C*** (-5 > -20)

In questo caso, le congetture **non** sono corrette! Quindi {*C*,*C*} è l'unico equilibrio di Nash per questo gioco.

Un altro esempio

		Y	
		a	b
X	a	0 , 0	1 , 2
	b	2 , 1	0 , 0

Se Y gioca ***a***, la miglior risposta di X è giocare ***b*** (2 > 0); se X gioca ***b***, la miglior risposta di Y è giocare ***a*** (1 > 0)

Se Y gioca ***b***, la miglior risposta di X è giocare ***a*** (1 > 0); se X gioca ***a***, la miglior risposta di Y è giocare ***b*** (2 > 0)

Quindi **{ *b* , *a* }** e **{ *a* , *b* }** sono entrambi **equilibri di Nash** ugualmente probabili per questo gioco.

NB: ci possono essere diversi equilibri di Nash.

Equilibri di Nash nel gioco d’entrata

		Y			
		(i)	(ii)	(iii)	(iv)
X	*E*	1 , 1	1 , 1	-1 , -1	-1 , -1
	NE	0 , 2	0 , 3	0 , 2	0 , 3

Se *Y* gioca ***(i)***, *X* gioca ***E***; se *X* gioca ***E***, *Y* gioca ***(i) o (ii)***

Se *Y* gioca ***(ii)***, *X* gioca ***E***; se *X* gioca ***E***, *Y* gioca ***(i) o (ii)***

Se *Y* gioca ***(iii)***, *X* gioca ***NE***; se *X* gioca ***NE***, *Y* gioca ***(ii) o (iv)***

Se *Y* gioca ***(iv)***, *X* gioca ***NE***; se *X* gioca ***NE***, *Y* gioca ***(ii) o (iv)***

NB: **{ *E , (i)* }**, **{ *E , (ii)* }**, e **{ *NE , (iv)* }** sono equilibri di Nash.

		Y			
		(i)	(ii)	(iii)	(iv)
X	*E*	1 , 1	1 , 1	-1 , -1	-1 , -1
	NE	0 , 2	0 , 3	0 , 2	0 , 3

Consideriamo i tre equilibri di Nash:

1) **{ *E* ; *P* se *E* , *P* se *NE* }** ; risultato: (1,1)

2) **{ *E* ; *P se E* , *T se NE* }** ; risultato : (1,1)

3) **{ *NE* ; *T se E* , *T se NE* }** ; risultato : (0,3)

NB: i primi due equilibri generano lo **STESSO** risultato, perché le strategie di *Y* sono diverse solo in un nodo decisionale che **NON** è raggiunto nell'effettivo svolgimento del gioco.

L’equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi

In un gioco sequenziale può capitare che non tutti gli equilibri di Nash siano egualmente plausibili: alcuni di essi possono essere basati su **minacce non credibili**.

Consideriamo i tre equilibri di Nash nel gioco d’entrata: quando X gioca E, le azioni al **nodo decisionale che non viene raggiunto** non influenzano la vincita di Y (cioè i primi due equilibri di Nash generano lo stesso risultato)

Quindi Y può pianificare di scegliere qualsiasi azione in corrispondenza di questo nodo decisionale: dato che la strategia di X è di scegliere E, la vincita di Y resta massimizzata.

Ma quello che la strategia di Y dice che lui farà in corrispondenza del nodo che non viene raggiunto può in realtà far sì che X, data la strategia di Y, voglia giocare NE invece di E!

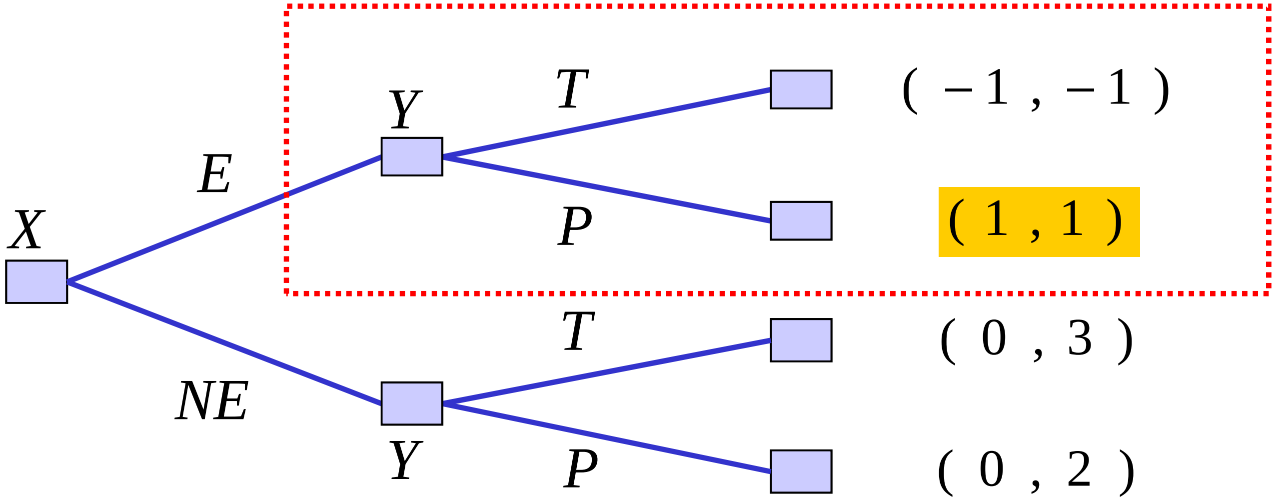
Per considerare questa eventualità, introduciamo il principio della **razionalità sequenziale**: la strategia di ogni giocatore dovrebbe definire azioni **ottimali** in **ogni** punto dell’albero del gioco.

In altre parole, dato che il giocatore si trova in un certo punto dell’albero, la sua strategia dovrebbe indicare di giocare una azione che sia ottimale **da quel punto in poi** date le strategie degli avversari.

La razionalità sequenziale è strettamente legata all’idea della **credibilità**: sotto l’ipotesi di razionalità sequenziale, ogni volta che un agente è chiamato a muovere (cioè ad ogni nodo decisionale dell’agente), è nell’interesse dell’agente stesso scegliere l’azione indicata dalla sua strategia.

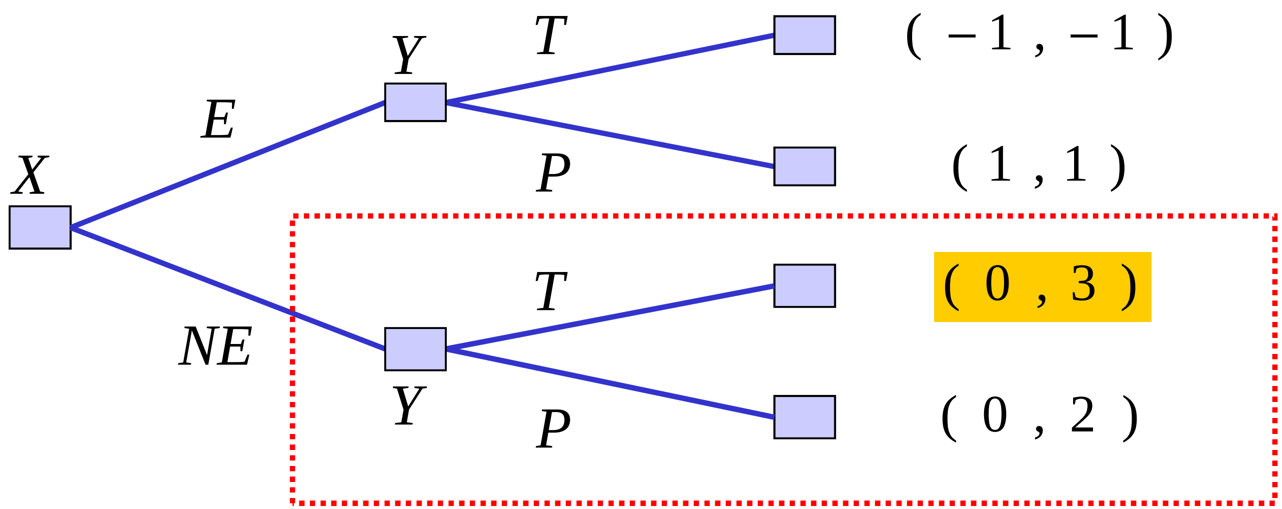
Quindi le strategie che rispettano il principio di razionalità sequenziale sono **credibili**.

Per averne l'intuizione, consideriamo il gioco d'entrata rappresentato in forma estesa:



Supponiamo che *X* abbia già scelto di entrare (*E*): quale sarebbe la risposta ottimale di *Y*?

Chiaramente *Y* sceglierebbe di essere accomodante e produrre poco (*P*), dato che 1 > -1!



Supponiamo che invece *X* abbia già scelto di non entrare (*NE*): quale sarebbe la risposta ottimale per *Y*?

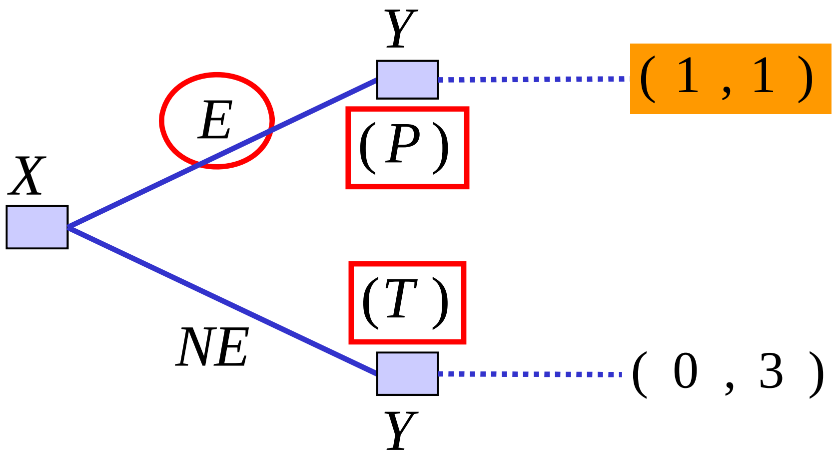
Ora *Y* sceglierebbe di produrre tanto (*T*), dato che 3>2!

Una volta che *X* ha fatto la sua mossa, *Y* trova ottimale scegliere *P* se *X* ha scelto *E*, e *T* se *X* ha scelto *NE*.

NB: la strategia ***"P* se *E* , *T* se *NE"*** è l'unica che soddisfi il principio della razionalità sequenziale!

Quindi la strategia **“*P* se *E* , *T* se *NE*”** è la strategia credibile per *Y*, e *X* deve tenerne conto!

Dal punto di vista di *X*, il gioco razionale si riduce a:



Se *X* tiene conto del fatto che **“*P* se *E* , *T* se *NE*”** è l’unica strategia credibile per *Y*, *X* sceglierà evidentemente di entrare (*E*), perché $1 > 0$

La procedura utilizzata finora, che implica risolvere prima il problema di scelta alla “fine” del gioco e poi determinare quale sia la scelta ottimale nelle fasi precedenti del gioco data l’anticipazione di questo comportamento successivo, è nota come **induzione retrograda**, o **backward induction**.

Questa procedura è strettamente legata con la razionalità sequenziale perché assicura che le strategie scelte dai giocatori definiscano azioni che siano ottimali in corrispondenza di ogni nodo decisionale del gioco.

Usando questa procedura, abbiamo scoperto che:

$$\{E;\ P \text{ se } E\ ,\ T \text{ se } NE\}$$

è l’unico equilibrio di Nash del gioco d’entrata che **soddisfi** il principio di razionalità sequenziale, cioè è l’unico equilibrio di Nash che definisce solamente strategie credibili!

Un equilibrio di Nash che soddisfi il principio di razionalità sequenziale, cioè che definisca solamente strategie credibili, è noto come **equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi**.

In un equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi, ogni volta che un agente è chiamato a scegliere, l'azione definita dalla sua strategia si rivela essere il comportamento ottimale date le strategie dei suoi avversari.

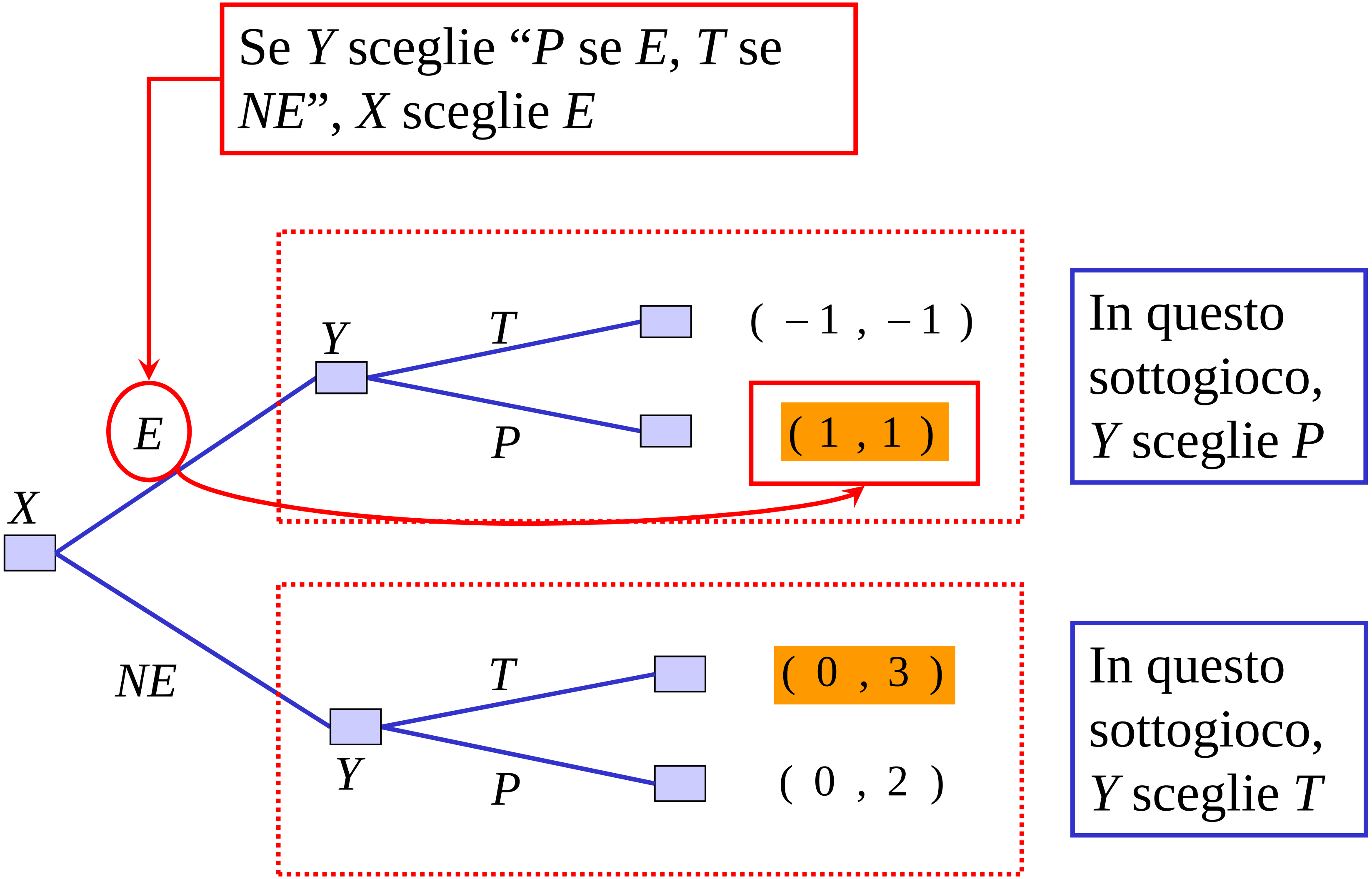
Quindi **{E; P se E , T se NE}** è l'unico equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi del gioco d'entrata.

Gli altri due equilibri di Nash

{E ; P se E , P se NE } , **{ NE ; T se E , T se NE }**

sono chiaramente basati su **minacce non credibili**: Y non sceglierebbe **MAI** "P se NE" o "T se E"!

Riepilogo



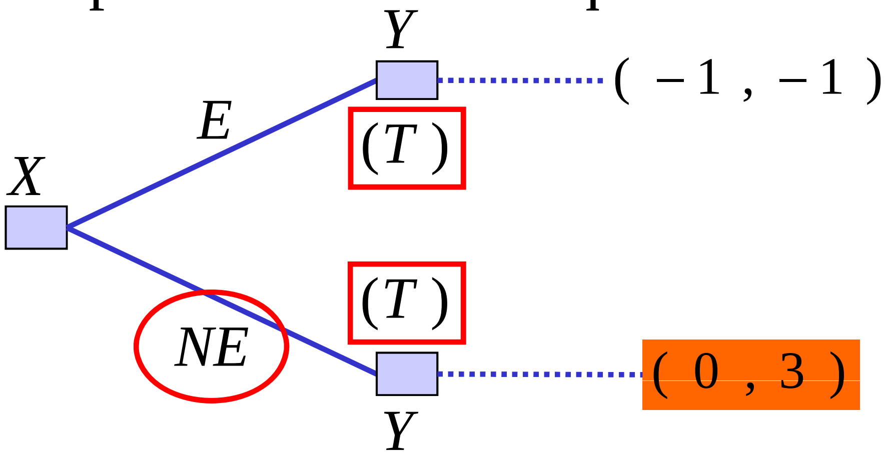
{*E*;*P* se *E*, *T* se *NE*} è l’equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi

Notiamo che l’equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi genera un risultato, (1,1), che non è il miglior risultato possibile per *Y*.

L’equilibrio di Nash **{*NE* ; *T* se *E* , *T* se *NE*}** genera un risultato molto migliore dal punto di vista di *Y*: (0,3)

Questo equilibrio di Nash è basato su una **minaccia non credibile**, dato che *Y* non sceglierebbe mai *T* se *X* decidesse di entrare.

Cosa succederebbe si *Y* **si impegnasse** a scegliere *T* indipendentemente da quello che fa *X*?



Se *X* prende sul serio la minaccia, sceglie *NE*, e *Y* ottiene il suo massimo profitto.

Forma estesa o forma normale?

- Per trovare l'equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi di un gioco sequenziale si utilizza la rappresentazione del gioco in forma estesa e si risolve usando l'induzione retrograda.

- Per trovare tutti gli equilibri di Nash di giochi simultanei o sequenziali si utilizza la rappresentazione del gioco in forma normale.