



Dipartimento di Giurisprudenza ed Economia
Corso di Laurea in Scienze Economiche

Statistica Economica

a.a. 2017/18

Prof. Massimo Finocchiaro Castro

massimo.finocchiaro@unirc.it

Programma

- Introduzione e richiami (Capitolo 1)
 - Domande economiche e dati economici
- Richiami di probabilità (Capitolo 2)
- Richiami di statistica (Capitolo 3)
- Elementi fondamentali dell'analisi di regressione (Capitoli 4, 5, 6, 7,8,9)
 - Regressione lineare con un singolo regressore
 - Regressione lineare con un singolo regressore: verifica di ipotesi e intervalli di confidenza
 - Regressione lineare con regressori multipli
 - Verifica di ipotesi ed intervalli di confidenza nella regressione multipla
 - Funzioni di regressioni non lineari
 - Valutazioni di studi basati sulla regressione multipla
- Regressioni per serie temporali di tipo economico
 - Introduzione a regressioni temporali e previsioni (Capitolo 14)

Testo di riferimento:

Stock, J.H. e Watson, M.W. (2016). Introduzione all'Econometria, 4/ed., Pearson Education, Milano.

Posologia

- Lezioni: lunedì 9-11; Mercoledì 9-11; Giovedì 9-11.
- Ricevimento: Mercoledì 13-14.30.
- Alla fine di ogni settimana saranno assegnati degli esercizi da correggere in classe la settimana successiva.
- Modalità di esame: Prova Scritta (domande ed esercizi).
- Sarà effettuata una prova intermedia (13/11) ed uno scritto finale (11/12).
- Saranno previsti dei questionari da svolgere in classe durante le lezioni a fini puramente auto-valutativi.

Controindicazioni

- Corso non adatto a “furbi”, svogliati e amanti della chiacchiera.
- È obbligatorio il silenzio durante le spiegazioni.
- Si richiede la partecipazione alle discussioni ed almeno la tentata risoluzione degli esercizi.
- Si consiglia la frequenza e la partecipazione alle prove intermedie.

Econometria

- Scienza che sottopone a verifica le teorie economiche
- Insieme di strumenti usati ai fini della previsione
- Adattamento di modelli economico-matematici ai dati del mondo reale
- Scienza che usa i dati storici per fare raccomandazioni di politica economica per il governo o gli affari

La teoria economica suggerisce interessanti relazioni, spesso con implicazioni di politica economica, ma quasi mai è in grado di segnalare la dimensione quantitativa degli effetti causali

- Quale è l'elasticità di prezzo delle sigarette?
- Quale è l'effetto della riduzione della dimensione delle classi sul rendimento di uno studente?
- Quale è l'effetto dell'istruzione sul reddito
- Quale è l'effetto dell'aumento di un punto percentuale del tasso d'interesse fissato dalla BCE sul tasso di crescita dell'Italia?

- La nostra attenzione si focalizzerà sull'uso dei metodi statistici ed econometrici al fine di quantificare gli effetti causali
- Idealmente vorremmo poter usare dati sperimentali, cioè ottenuti da esperimenti disegnati per valutare un trattamento, una specifica azione di politica economica, un effetto causale.
- Solitamente si possono usare soltanto dati non sperimentali osservando il comportamento reale al di fuori di un contesto sperimentale
- Tuttavia nel caso dei dati sperimentali può risultare difficile scindere l'effetto "trattamento" da altri fattori rilevanti

In questo corso potrete

- Imparare i metodi per stimare gli effetti causali usando dati non sperimentali
- Familiarizzare con gli strumenti da utilizzare per altri scopi, ad esempio fornire previsioni economiche
- Focalizzare l'attenzione sulle applicazioni mantenendo al minimo la teoria
- Capire ed interpretare i risultati empirici riportati da quotidiani e telegiornali

Esempi di indagini econometriche

Problema da analizzare: Riforma del sistema di istruzione pubblica

- Scuola Elementare: migliorare apprendimento

Proposta: Ridurre la dimensione delle classi migliora la qualità dell'istruzione nella scuola elementare

- Sì?
- Di quanto? Possiamo misurare il beneficio per compararlo con i costi?
- Come si misura?
- Quale è la dimensione ottimale?
- Ci possono essere cause alternative per spiegare un maggiore apprendimento nelle classi la cui dimensione è stata ridotta?

Esempi di indagini econometriche

Problema: Discriminazione (di vario tipo) nella concessione dei mutui per le abitazioni.

- La teoria dice che non dovrebbe esserci alcuna discriminazione nella concessione dei mutui
- La FED di Boston mostra che nei primi anni Novanta al 28% dei richiedenti afro-americani veniva rifiutato il mutuo contro il 9% dei richiedenti bianchi.

C'è discriminazione?

- Bisogna valutare l'effetto della razza o altro sulla probabilità di ottenere un mutuo controllando (tenendo costante) tutti gli altri fattori che sono importanti per la concessione di un mutuo

Esempi di indagini econometriche

Problema: Ridurre il consumo di sigarette

Proposta: aumentare le imposte sul tabacco

- La teoria economica suggerisce che un aumento delle imposte sul tabacco causa una diminuzione nei consumi dello stesso.
- Di quanto?
 - Bisogna guardare l'elasticità della domanda di tabacco
 - Problema di causalità simultanea
 - Se la domanda è alta (molti fumatori) potrebbe condizionare i politici a tenere prezzi bassi.

Esempi di indagini econometriche

Quale sarà il tasso d'inflazione il prossimo anno?

- Problema di previsione e quindi non riguarda la stima di un effetto causale

Che cosa determina la crescita delle nazioni?

- La teoria economica suggerisce la possibilità di convergenza, mentre l'evidenza empirica sembra suggerire il contrario. Abbiamo teorie ragionevoli?

Dati Economici

- Dati Sperimentali
 - Provengono da esperimenti disegnati per valutare un trattamento oppure per valutare un effetto causale (ad es. una particolare politica economica).
 - Gruppo di controllo e gruppo di trattamento
- Dati non Sperimentali
 - Raccolti tramite indagini campionarie
 - I livelli di trattamento non sono assegnati in maniera causale
 - È difficile distinguere gli effetti del trattamento da altri effetti

Dati Economici

- Dati Sezionali (Cross Section)
 - Dati su entità diverse osservati per un solo periodo
 - Il numero delle entità definisce la dimensione del database
- Serie Temporalì (Time Series)
 - Dati per una singola entità osservati in momenti diversi
 - Il numeri di momenti (anni, mesi, giorni) in cui la singola entità viene osservata definisce la dimensione del database
- Dati Panel (Longitudinali)
 - Dati su entità diverse ognuna delle quali è osservata in due o più periodi.
 - Il numero totale di osservazioni a disposizione è:
$$n^{\circ}\text{entità} * n^{\circ}\text{periodi}$$

Variabili Casuali e Distribuzioni di Probabilità

Definizioni

- Risultati: esiti potenziali (mutuamente esclusivi) di un processo casuale
 - Es.: il mio pc si blocca 0 volte, 1 volta, 2 volte, mai
- Probabilità: proporzione di volte in cui un determinato risultato si verifica nel lungo periodo
 - Se la probabilità che il computer non si blocchi è pari all'80%, significa che scrivendo un numero elevato di documenti l'80% di questi sarà completato

Variabili Causali e Distribuzioni di Probabilità

Definizioni

- Spazio Campionario: insieme di tutti i risultati possibili
- Evento: sottoinsieme di uno spazio campionario, cioè può essere composto da uno o più risultati.
 - L'evento “il pc non si bloccherà più di una volta” contiene due risultati: “un blocco” e “nessun blocco”
- Variabili casuali: indicatore numerico di un risultato casuale
 - Numero di volte in cui il pc si blocca
- Variabile casuale discreta: $0, 1, 2, \dots$
- Variabile casuale continua: $[-\infty, +\infty]$

Distribuzione di Probabilità

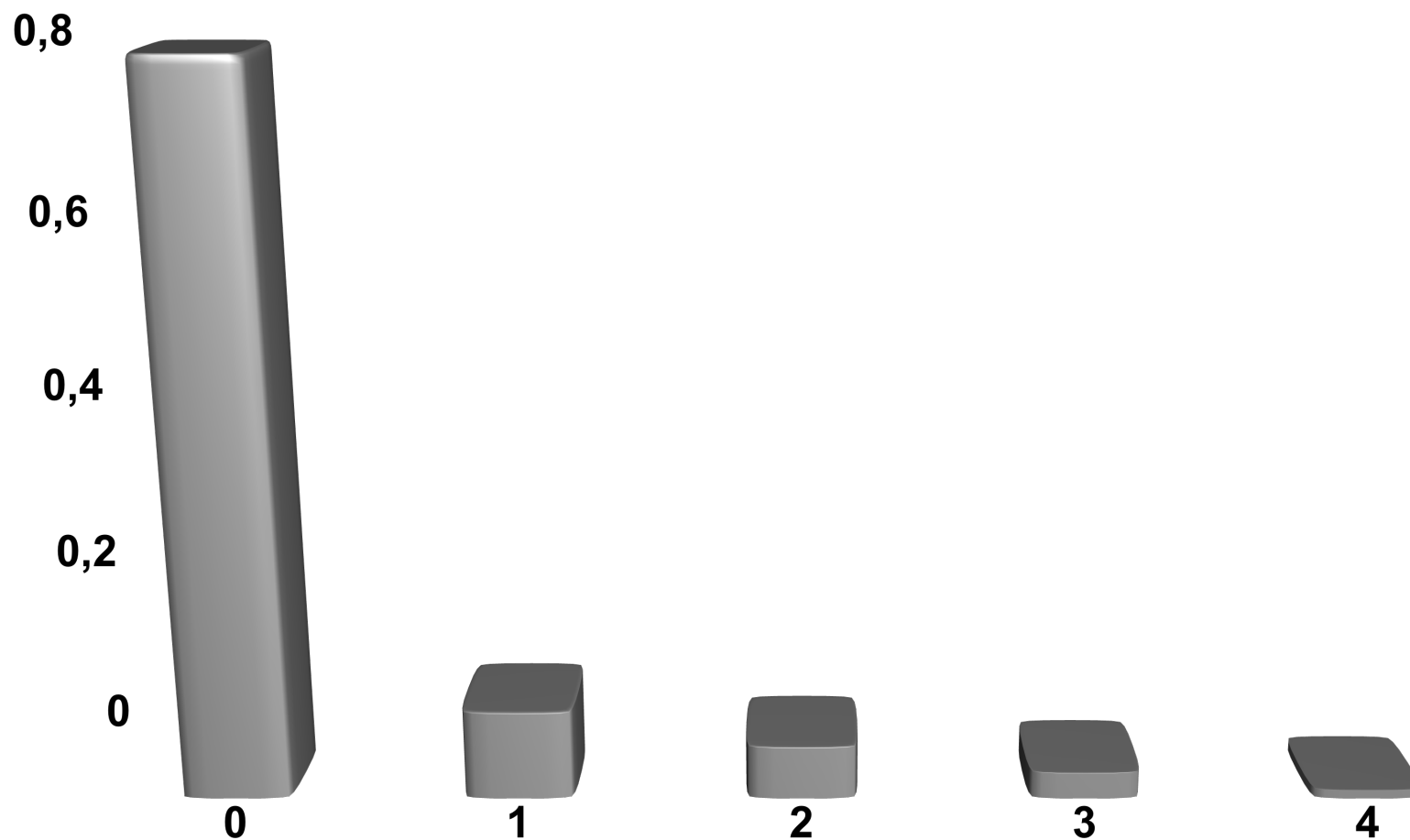
Variabile Casuale Discreta

- Definizione: elenco di tutti i possibili valori della variabile e delle probabilità con cui si verificano.

Numero blocchi	0	1	2	3	4
Distribuzione di Probabilità	0,8	0,1	0,06	0,03	0,01
Distribuzione di probabilità cumulata	0,8	0,9	0,96	0,99	1

- Probabilità di eventi: utilizzando la distribuzione di probabilità.
 - Es. $\Pr(M=1 \text{ o } M=2) = \Pr(M=1) + \Pr(M=2) = 0,1 + 0,06 = 0,16$ (16%)
- Distribuzione di probabilità cumulata (o Funzione di ripartizione)
 - Probabilità che una variabile casuale sia minore o uguale ad un particolare valore.
 - Es. Probabilità che ci sia almeno un blocco = $\Pr(M \leq 1) = \Pr(M=0) + \Pr(M=1) = 0,8 + 0,1 = 0,9$ (90%)

Distribuzione di Probabilità del numero di blocchi del pc



numero blocchi

Distribuzione di Bernoulli

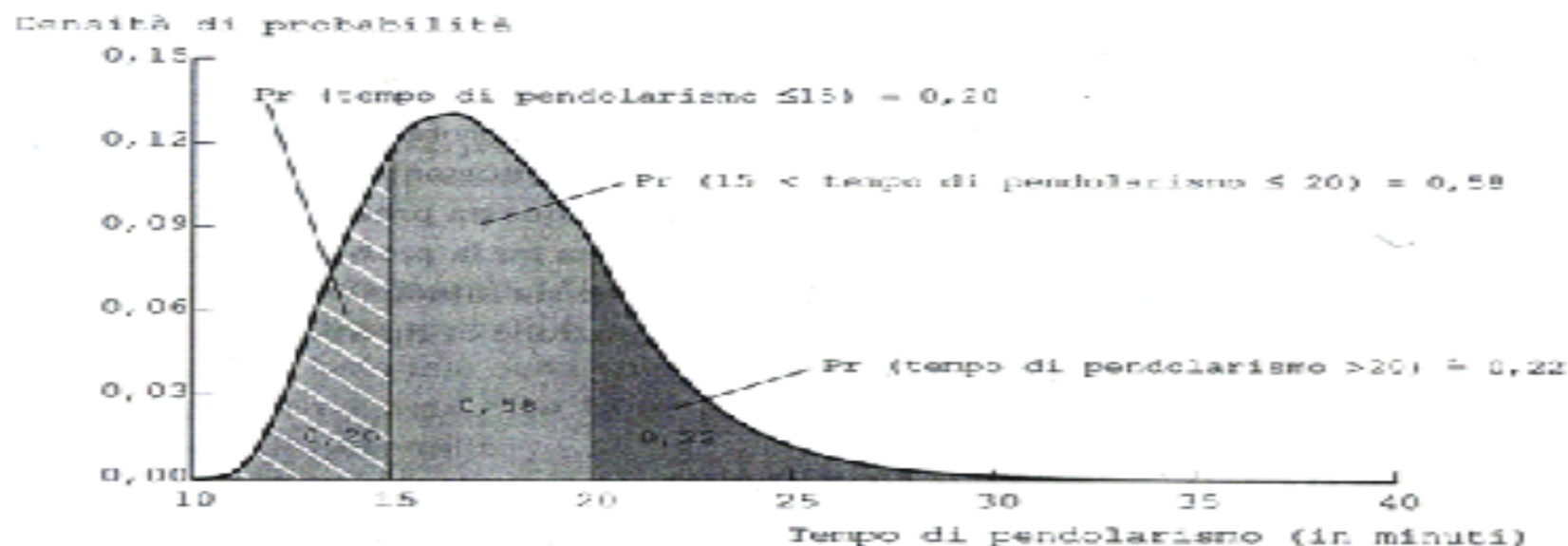
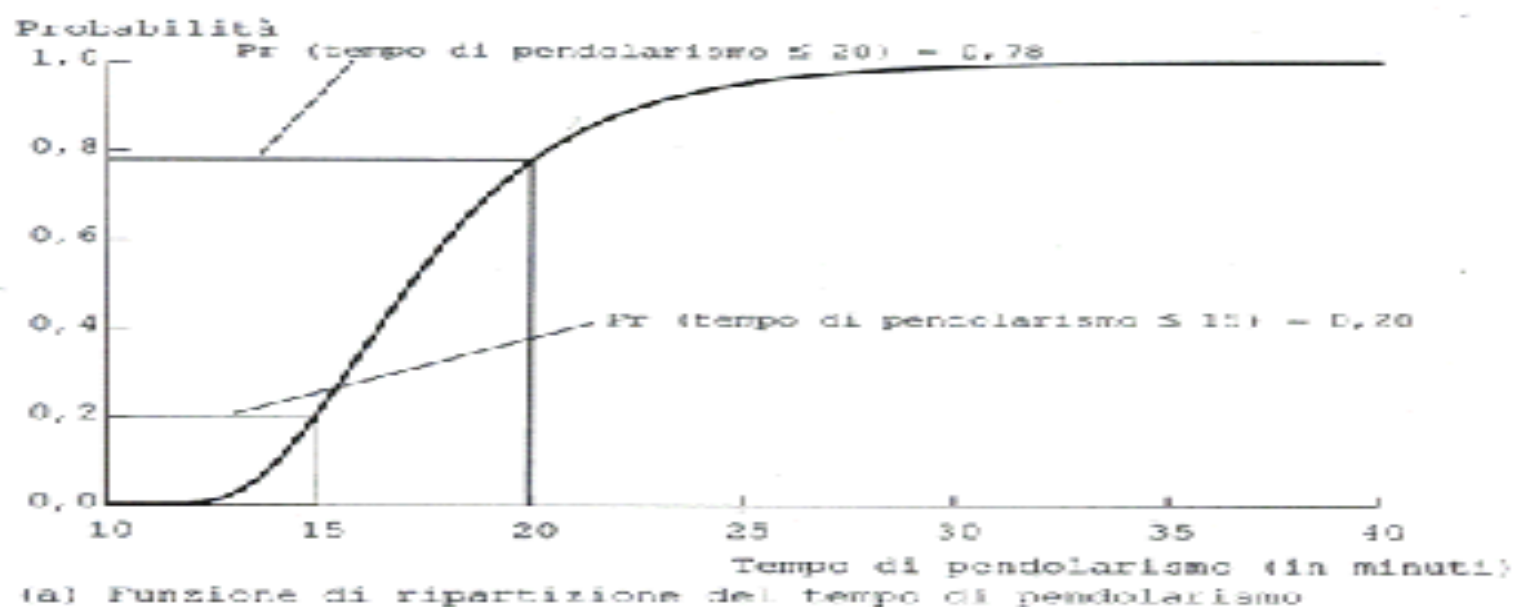
- Un particolare caso di variabile binaria è la variabile casuale di Bernoulli che può assumere soltanto i valori 0 oppure 1.
- La sua distribuzione è chiamata Distribuzione di Bernoulli
 - Es. Definiamo F come la faccia che esce quando lanciamo una moneta, dove $F=1$ se esce testa e $F=0$ se esce croce. I risultati possibili e le probabilità sono:

(2.1)

$$F = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } p \\ 0 & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$$

Distribuzione di Probabilità di una variabile casuale continua

- Possiamo applicare gli stessi concetti illustrati per le variabili casuali discrete.
- La funzione di ripartizione di una variabile casuale continua è la probabilità che la variabile sia minore o uguale ad un certo valore.
 - Il tempo impiegato da uno studente/lavoratore per guidare da casa a scuola/ufficio.
- Una differenza è data dalla distribuzione di probabilità
 - In questo caso parleremo di Funzione di Densità di Probabilità (p.d.f.)
- L'area sottostante la p.d.f. tra due punti qualsiasi rappresenta la probabilità che la variabile casuale cada tra quei due punti.



Valore Atteso, Media e Varianza

- Valore Atteso (media di Y ; μ_Y ; $E(Y)$) è il valore medio della variabile casuale.
 - Nel caso di variabili casuali discrete, il valore atteso è calcolato come media ponderata dei possibili risultati con i pesi pari alla probabilità di tali risultati.
 - Esempio: Consideriamo nuovamente il caso del [blocco del pc](#). Il valore atteso di M è il numero medio di blocchi ponderato con la frequenza con la quale avviene un certo numero di blocchi.
Avremo $E(M)=0*0.8+1*0.1+2*0.06+3*0.04+4*0.01=0.35$ (2.1)
- Variabile casuale di Bernoulli
 - $E(F)=1*p+0*(1-p)=p$ (2.3)
- Variabile casuale continua
 - Integrali

Valore Atteso, Media e Varianza

- Data una variabile casuale che assume k valori, $y_1, y_2, \dots, y_k$ e che la probabilità che Y assuma il valore y_1 sia p_1 e così via. Il valore atteso di Y è

$$E(Y) = y_1 p_1 + y_2 p_2 + \dots + y_k p_k = \sum_{i=1..k} (y_i p_i) \quad (2.4)$$

- La varianza e la deviazione standard sono misure di dispersione di una distribuzione di probabilità.
 - Varianza: $\sigma^2_Y = \text{var}(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] = \sum_{i=1..k} (y_i - \mu_Y)^2 p_i$ (2.6)
 - Deviazione standard: $\sqrt{\text{var}(Y)} = \sigma_Y$.
- Esempio del [blocco pc](#):
 - $\text{Var}(M) = (0 - 0,35)^2 * 0,8 + (1 - 0,35)^2 * 0,1 + (2 - 0,35)^2 * 0,06 + (3 - 0,35)^2 * 0,03 + (4 - 0,35)^2 * 0,01 = 0,6475$
 - $\sigma_Y = \sqrt{0,6475} \approx 0,8$
- Variabile di Bernoulli: $\mu_F = p$; $\text{Var}(F) = (0 - p)^2 * (1 - p) + (1 - p)^2 * p = p(1 - p)$; $\sigma_F = \sqrt{p(1 - p)}$

Esempio prestito

- Supponiamo di prestare 100 euro ad un amico ad un tasso d'interesse del 10%.
- Se il prestito viene restituito otteniamo 110 euro.
- Il rischio che il nostro amico sia insolvente è pari all'1%.
- L'ammontare rimborsato è una variabile casuale che è uguale a 110 euro con la probabilità 0,99 ed a 0 euro con probabilità 0,01.
- Considerando molti prestiti avremo un valore atteso di rimborso pari a
 - $110 \text{ euro} \cdot 0,99 + 0 \text{ euro} \cdot 0,01 = 108,90 \text{ euro}$
 - Conviene?

Esempio con una funzione lineare di due Variabili

- Supponiamo un'imposizione fiscale pari al 20% del proprio reddito che prevede anche un trasferimento esentasse di 2000\$. In termini formali abbiamo,

$$Y=2000+0,8X$$

(2.8)

- Assumiamo che Y (reddito netto) sia una variabile casuale con media μ_Y e varianza σ^2_Y . Anche X (reddito lordo) sarà una variabile casuale. Possiamo calcolare la media e la variazione standard di Y .
 - $E(Y) = \mu_Y = 2000 + 0,8\mu_X$ (2.9)
 - $\text{Var}(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2]$ Allora $Y - \mu_Y = 2000 + 0,8X - 2000 - 0,8\mu_X = 0,8(X - \mu_X)$, quindi $E[(Y - \mu_Y)^2] = E\{[0,8(X - \mu_X)]^2\} = 0,64 E[(X - \mu_X)^2]$. Quindi $\text{var}(Y) = 0,64 \text{var}(X)$
 - La deviazione standard è $\sigma_Y = 0,8 \sigma_X$

Distribuzioni Congiunte

- La distribuzione di probabilità congiunta di due variabili casuali discrete X e Y misura la probabilità che le variabili assumano certi valori (x e y) simultaneamente.
 - La somma di tali probabilità sarà sempre uguale ad uno
 - Possiamo quindi scrivere $\Pr(X=x, Y=y)$

Distribuzione congiunta di condizioni meteorologiche e tempo di percorrenza

- Le condizioni meteorologiche influenzano il tempo di percorrenza di un pendolare.
 - Y è variabile casuale binaria uguale ad 1 se il tempo di percorrenza è minore di 20 minuti ed a zero altrimenti
 - X è variabile casuale binaria uguale a zero se piove ed a 1 altrimenti
 - Considerando le due variabili si ottengono 4 possibili risultati
- La distribuzione di probabilità congiunta è la frequenza con la quale ciascuno di questi 4 risultati si verifica considerando molti viaggi.

Esempio

	Pioggia ($X=0$)	No Pioggia ($X=1$)	Totale
Tragitto lungo ($Y=0$)	0.15	0.07	0.22
Tragitto breve ($Y=1$)	0.15	0.63	0.78
Totale	0.3	0.7	1

Distribuzione marginale e condizionata

- La distribuzione di probabilità marginale di una variabile casuale Y coincide con la distribuzione di probabilità di Y .
- La distribuzione di una variabile casuale Y condizionata ai valori assunti da un'altra variabile casuale X è definita distribuzione condizionata di Y data X .

- $\Pr(Y=y|X=x) = \Pr(X=x, Y=y) / \Pr(X=x)$ (2.15)

- Quale è la probabilità di un tempo di percorrenza lungo ($Y=0$) se si sa che sta piovendo ($X=0$)?

- $\Pr(Y=0|X=0) = \Pr(X=0, Y=0) / \Pr(X=0) = 0,15 / 0,30 = 0,50$

- Esempio. Supponiamo di andare in biblioteca per scrivere il nostro articolo. Ci viene assegnato un pc in maniera casuale.
- Metà dei pc sono nuovi e metà sono vecchi. La probabilità che il pc si blocchi ha una distribuzione condizionata all'età del pc utilizzato.
- $A=1$ pc nuovo, 0 altrimenti
- Probabilità congiunta di $M=A=0$?
- Probabilità condizionata che utilizzando un pc vecchio non ci siano blocchi
 - $\Pr(M=0, A=0)/\Pr(A=0)=0,35/0,50=0,70$

Esempio di Distribuzione di Probabilità Condizionata

Distribuzione Congiunta

	M=0	M=1	M=2	M=3	M=4	Totale
Computer Vecchio	0.35	0.065	0.05	0.025	0.01	0.5
Computer Nuovo	0.45	0.035	0.01	0.005	0	0.5
Totale	0.8	0.1	0.06	0.03	0.01	1

Distribuzione Condizionata di M data A(=1 se è nuovo, =0 se è vecchio)

	M=0	M=1	M=2	M=3	M=4	Totale
$\Pr(M A=0)$	0.7	0.13	0.1	0.05	0.02	1
$\Pr(M A=1)$	0.9	0.07	0.02	0.01	0	1

Media e Varianza Condizionata

- La media condizionata di Y data X è la media della distribuzione condizionata di Y data X . È il valore medio di Y quando $X=x$.
 - $E(Y|X=x) = \sum_{i=1 \dots k} \Pr(Y=y_i|X=x)$ (2.16)
- Riferendoci alla tabella precedente calcoliamo la media condizionata dei blocchi dato un computer nuovo:
 - $E(M|A=1) = 0*0.9 + 1*0.07 + 2*0.02 + 3*0.01 + 4*0 = 0.14$
- E se volessimo calcolare il numero medio dei blocchi?
 - Dobbiamo utilizzare la legge delle interazioni iterate
 - $E(Y) = E[E(Y|X)]$ (2.18)

Esempio: $E(M) = E(M|A=0)*\Pr(A=0) + E(M|A=1)*\Pr(A=1) = 0.56*0.5 + 0.14*0.5 = 0.35$

Media e Varianza Condizionata

- La varianza di Y condizionata a X è la varianza della distribuzione condizionata di Y data X .
 - $\text{Var}(Y|X=x) = \sum_{i=1 \dots k} [y_i - E(Y|X=x)]^2 \Pr(Y=y_i|X=x)$ (2.19)
 - Esempio: $\text{var}(M|A=0) = (0-0.56)^2 \cdot 0.7 + (1-0.56)^2 \cdot 0.13 + (2-0.56)^2 \cdot 0.1 + (3-0.56)^2 \cdot 0.05 + (4-0.56)^2 \cdot 0.02 \approx 0.99$
- Due variabili casuali X e Y sono indipendentemente distribuite (indipendenti), se conoscere il valore di una di esse non fornisce alcuna informazione circa l'altra.
 - X e Y sono indipendentemente distribuite se per tutti i valori x e y
- Considerando la distribuzione congiunta delle due variabili abbiamo
 - $\Pr(Y=y|X=x) = \Pr(Y=y)$ oppure $\Pr(X=x, Y=y) = \Pr(X=x) \cdot \Pr(Y=y)$ (2.20 e 2.21)

Covarianza

- La covarianza è una misura dell'intensità con la quale due variabili casuali si muovono insieme.
 - $\text{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\sum_{i=1}^k.\sum_{j=1}^l(x_j-\mu_X)(y_i-\mu_Y)\text{Pr}(X=x_j,Y=y_i)$ (2.22)
- Ad esempio, supponiamo che quando X è maggiore della sua media, Y tenda ad essere maggiore della propria media e viceversa. In entrambi i casi la covarianza è positiva.
- Se le due variabili casuali tendono a muoversi nella stessa (opposta) direzione, la covarianza è positiva (negativa).
- Se le due variabili casuali sono indipendenti che valore assumerà la covarianza?
- L'unità di misura della covarianza può rendere problematica l'interpretazione dei suoi risultati. Unità di misura di X per quella di Y .

Correlazione

- La Correlazione è una misura alternativa della dipendenza tra Y e X che risolve il problema dell'unità di misura della covarianza.
 - $\text{Corr}(X,Y)=\text{Cov}(X,Y)/\sqrt{[\text{var}(X)\text{var}(Y)]}=\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$ (2.23)
 - $-1\leq\text{Corr}(X,Y)\leq 1$
- Correlazione e media condizionata
 - Se $E(Y|X)=\mu_Y$, allora $\text{cov}(Y,X)=0$ e $\text{corr}(Y,X)=0$
(il percorso inverso non è necessariamente vero)

Media e Varianza di somme di variabili casuali

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\mu_X + \mu_Y$ (2.26)

- $Var(X+Y)=var(X)+var(Y)+2cov(X,Y)=\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \sigma_{XY}$ (2.27)

- Se X e Y sono indipendenti la $cov(X,Y)=0$, quindi
– $Var(X+Y) = var(X)+var(Y)+2cov(X,Y)=\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ (2.28)

- $E(a+bX+cY) = a+b\mu_X+c\mu_Y$ (2.29)

- $Var(a+bY)=b^2 \sigma_Y^2$ (2.30)

- $Var(aX+bY)=a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}$ (2.31)

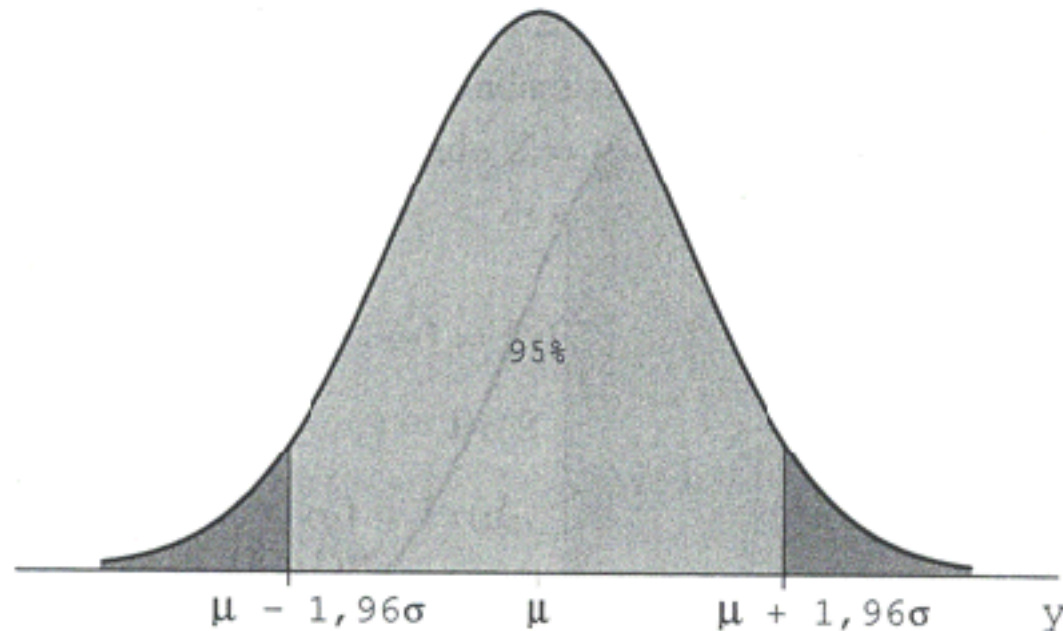
- $E(Y^2)= \sigma_Y^2 + \mu_Y^2$ (2.32)

- $Cov(a+bX+cY)=b\sigma_{XY}+c\sigma_{YV}$ (2.33)

- $E(XY)=\sigma_{XY}+\mu_X\mu_Y$ (2.34)

La Distribuzione Normale

Figura 2.3: la densità di probabilità normale



La funzione di densità di probabilità normale con media μ e varianza σ^2 è una curva di forma campanulare, centrata in μ . L'area sotto la funzione di densità normale compresa tra $\mu - 1,96\sigma$ e $\mu + 1,96\sigma$ è 0,95. La distribuzione normale è indicata con $N(\mu, \sigma^2)$.

Distribuzione Normale Standard

- È la distribuzione normale con $N(0,1)$.
- Le variabili con tale distribuzione sono usualmente indicate con Z e la funzione di ripartizione normale standard è indicata con Φ .
 - $\Pr(Z \leq c) = \Phi(c)$, dove c è una costante.
- La probabilità di una variabile normale deve essere standardizzata prima di poterla calcolare: cioè bisogna prima sottrarre la media e dividere poi il risultato per la deviazione standard.

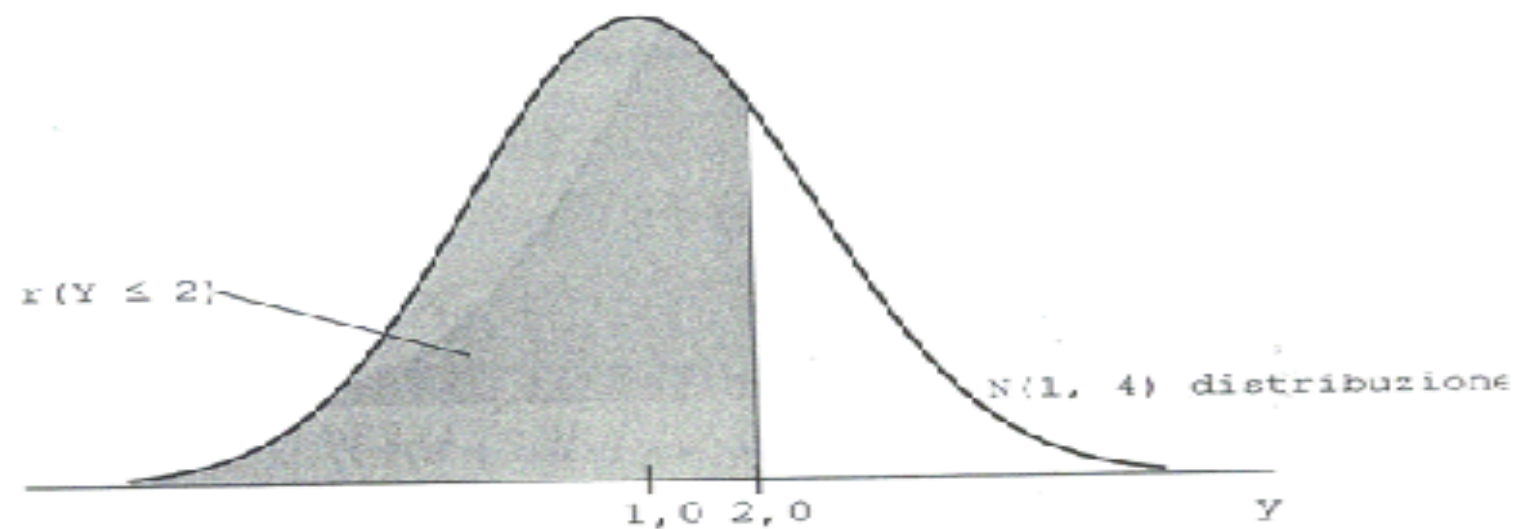
Matematicamente...

- Supponiamo $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Standardizzando Y otteniamo $Z = (Y - \mu) / \sigma$.
- Siano c_1 e c_2 due numeri tali che $c_1 < c_2$ e sia $d_1 = (c_1 - \mu) / \sigma$ e $d_2 = (c_2 - \mu) / \sigma$. Allora possiamo scrivere,
- $\Pr(Y \leq c_2) = \Pr(Z \leq d_2) = \Phi(d_2)$ (2.38)
- $\Pr(Y \geq c_1) = \Pr(Z \geq d_1) = 1 - \Phi(d_1)$ (2.39)
- $\Pr(c_1 \leq Y \leq c_2) = \Pr(d_1 \leq Z \leq d_2) = \Phi(d_2) - \Phi(d_1)$ (2.40)

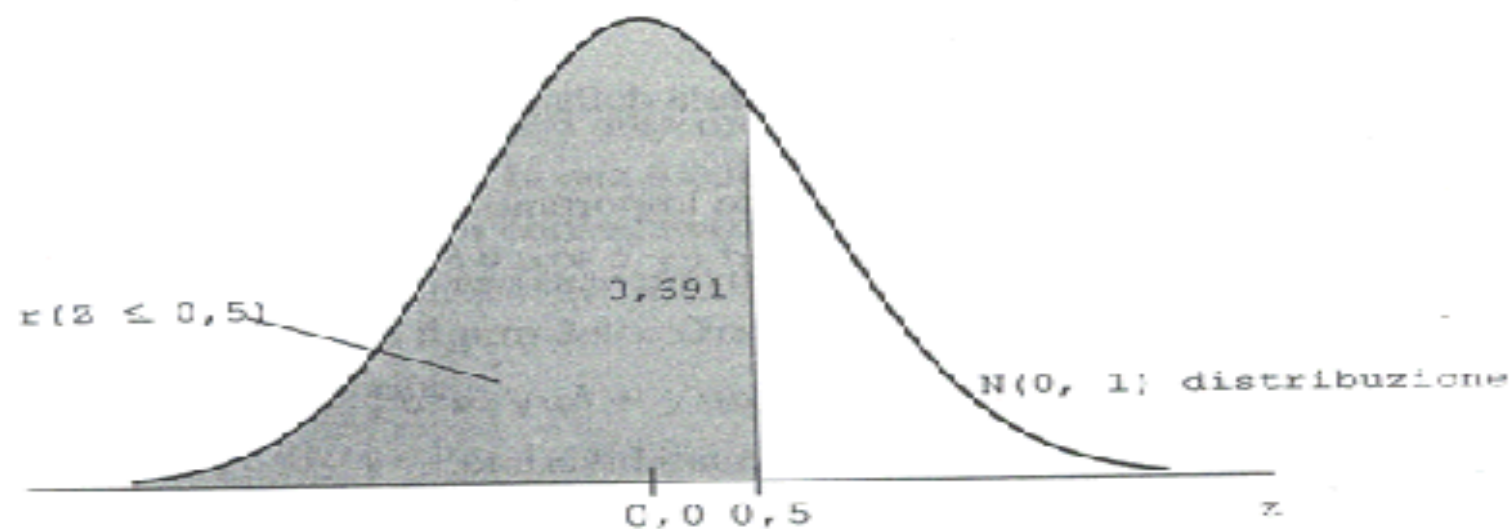
Esempio

- Supponiamo che Y sia distribuita secondo una $N(1,4)$. Calcoliamo la probabilità che $Y \leq 2$.
- Y standardizzata è $(Y-1)/\sqrt{4}=1/2(Y-1)$. Quindi la variabile casuale $1/2(Y-1)$ è distribuita secondo $N(0,1)$.
- La probabilità $Y \leq 2$ è equivalente a $1/2(Y-1) \leq 1/2(2-1)=1/2$.
- Possiamo quindi scrivere,
 - $\Pr(Y \leq 2) = \Pr[1/2(Y-1) \leq 1/2] = \Pr(Z \leq 1/2) = \Phi(0.5) = 0.691$ (2.36)
 - Il valore 0.691 è preso dalla tavola delle Z

Figura 2.4: calcolo della probabilità che $Y \leq 2$ quando Y si distribuisce come una $N(1, 4)$



(a) $N(1, 4)$



La distribuzione chi-quadrato (χ^2)

- È la distribuzione della somma dei quadrati di m variabili casuali, indipendenti e normalmente distribuite.
- m è chiamato numero di gradi di libertà della distribuzione chi-quadrato.
- $Z^2_1 + Z^2_2 + Z^2_3$ ha una distribuzione chi-quadrato con 3 gradi di libertà ($m=3$).
- I valori della distribuzione sono riportati in tavola 3 SW.

La distribuzione $F_{m,\infty}$

- È la distribuzione di una variabile casuale chi-quadrato con m gradi di libertà, divisa per m .
- $(Z^2_1 + Z^2_2 + Z^2_3)/3$ ha una distribuzione $F_{3,\infty}$.
- I valori della distribuzione sono riportati in tavola 4 SW.

La distribuzione t di Student

- La distribuzione t di Student con m gradi di libertà è la distribuzione del rapporto di due variabili casuali indipendenti.
 - $Z/\sqrt{W/m}$, dove Z è una variabile casuale normale standard e W è una variabile casuale con distribuzione chi-quadrato con m gradi di libertà.
- La forma della t è simile a quella della distribuzione normale. Per $m \geq 30$ la t è ben approssimata dalla distribuzione normale standard.

Campionamento Casuale

- Campionamento casuale: selezionare in modo casuale un campione da una popolazione più ampia.
 - Effetto: rendere la media campionaria una variabile casuale con, quindi, una distribuzione campionaria.
- Campionamento casuale semplice: n soggetti scelti a caso da una popolazione i cui membri hanno la stessa probabilità di essere scelti.
 - Esempio studente pendolare
- I valori delle osservazioni sono trattati come variabili casuali.
- La distribuzione marginale di ogni valore Y_i è la stessa per ogni $i=1, \dots, n$. Quindi tali variabili casuali sono identicamente distribuite.

Campionamento Casuale

- Conoscere il valore di Y_1 non fornisce alcuna informazione su Y_2 e la distribuzione condizionata di Y_2 data Y_1 coincide con la distribuzione marginale di Y_2 . Cioé Y_1 è distribuita indipendentemente dalle altre variabili casuali.
- Quando $Y_1, \dots, Y_n$ vengono dalla stessa distribuzione e sono indipendentemente distribuite sono indipendentemente e identicamente distribuite (i.i.d.).

Distribuzione campionaria della media campionaria

- La media campionaria di n osservazioni $Y_1, \dots, Y_n$ è
- Importante: l'estrazione di un campione casuale ha l'effetto di rendere la media campionaria una variabile casuale. La media campionaria varia da un campione ad un altro
- La distribuzione di $\bar{Y}$ è detta distribuzione campionaria di $\bar{Y}$
- Possiamo ottenere le seguenti formule per il valore medio, la varianza e la deviazione standard della media campionaria

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$E(\bar{Y}) = \mu_Y$$

$$\text{var}(\bar{Y}) = \sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n}$$

$$\text{std.dev}(\bar{Y}) = \sigma_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$$

Approssimazioni alla distribuzione campionaria per grandi campioni

- Per caratterizzare le distribuzioni campionarie si possono seguire due approcci
 - Esatto: formula che valga per ogni valore di n (distribuzione esatta o in campioni finiti).
 - Problemi se la distribuzione di Y non è normale.
 - Approssimato: elevata numerosità campionaria (distribuzione asintotica).
- Mentre le distribuzioni esatte sono molto complesse e dipendono dalla distribuzione di Y , le distribuzioni asintotiche sono semplici.
- L'approssimazione tramite la distribuzione normale è alla base di quasi tutti i test di econometria.

Legge dei grandi numeri e consistenza

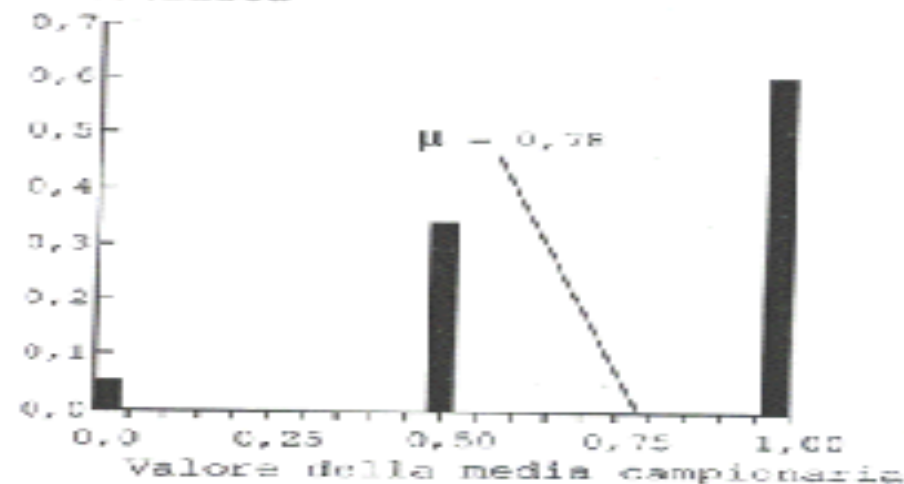
- La legge dei grandi numeri stabilisce che, sotto condizioni generali, $\bar{Y}$ è prossima a μ_Y con probabilità molto alta quando n è grande.
- Le condizioni perché valga la legge dei grandi numeri sono che le Y_i siano i.i.d. e che la varianza di Y_i sia finita.
- La convergenza in probabilità (consistenza) è la proprietà per cui $\bar{Y}$ è prossima a μ_Y con probabilità crescente al crescere di n .

Esempio con una distribuzione di Bernoulli

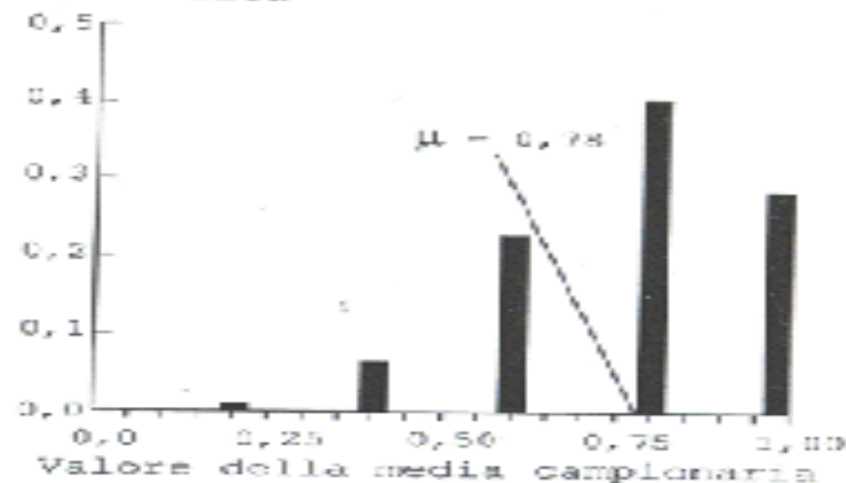
- La figura mostra la distribuzione campionaria di un viaggio lungo per varie dimensioni del campione.
- Dalla tabella precedente sappiamo che la probabilità di un viaggio breve $Y_i=1$ è $\mu_Y = 0.78$.
- Al crescere di n la media campionaria si avvicina sempre di più a μ_Y .

Figura 2.6: distribuzione campionaria della media campionaria di n variabili casuali di Bernoulli

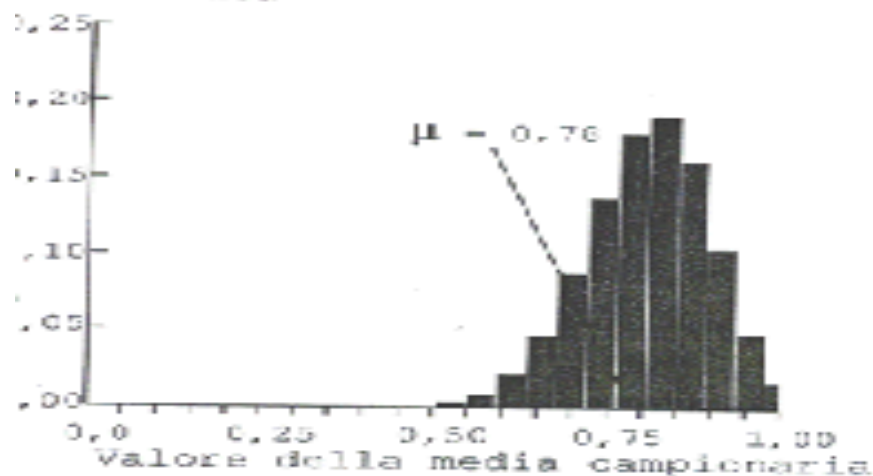
Probabilità



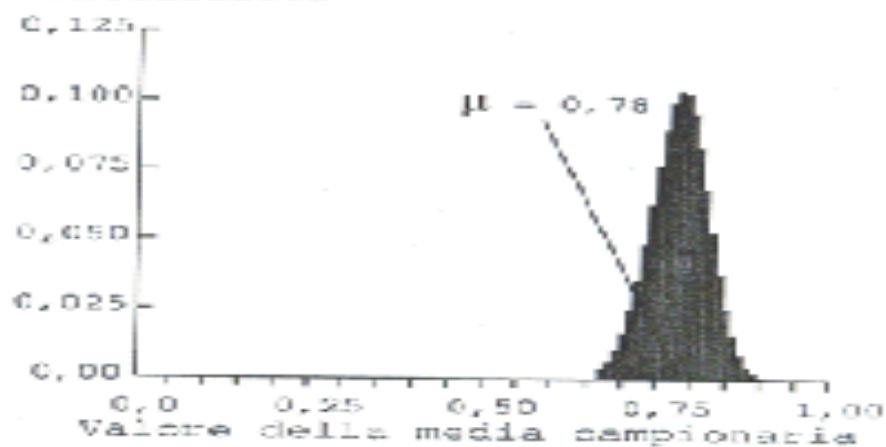
Probabilità



Probabilità



Probabilità

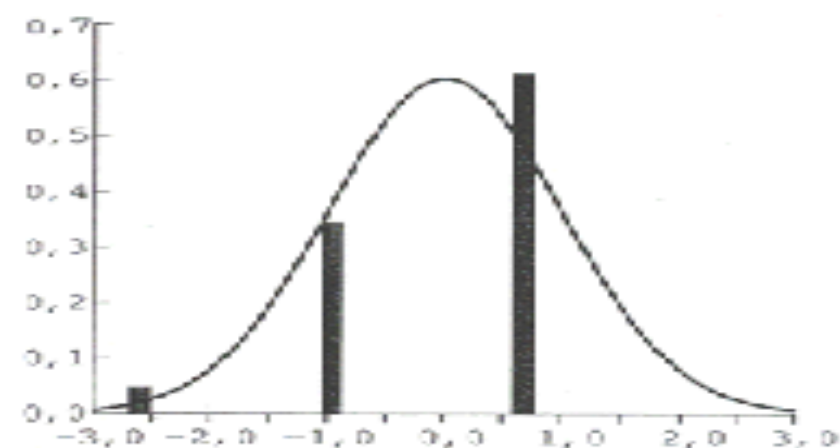


Il teorema limite centrale

- Il teorema limite centrale afferma che, sotto condizioni generali, la distribuzione di $\bar{Y}$ è ben approssimata da una distribuzione normale quando n è grande. Si distribuisce asintoticamente secondo una normale.
- Bisogna notare che il teorema non fa alcuna menzione al tipo di distribuzione delle osservazioni.
- Un esempio è fornito dalla figura 2.7 dove viene presentata la forma standardizzata della distribuzione di Bernoulli descritta in figura 2.6.
- La distribuzione della versione standardizzata di $\bar{Y}$ è
– $(\bar{Y} - \mu_Y) / \sigma_{\bar{Y}}$ ed è approssimata da $N(0,1)$ per n grande

Figura 2.7: distribuzione della media campionaria di n variabili casuali di Bernoulli con $p = 0,75$

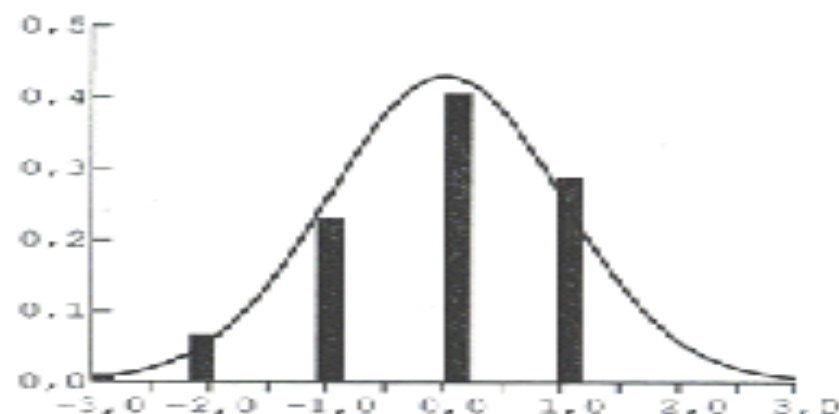
Probabilità



Valore standardizzato
della media campionaria

(a) $n = 2$

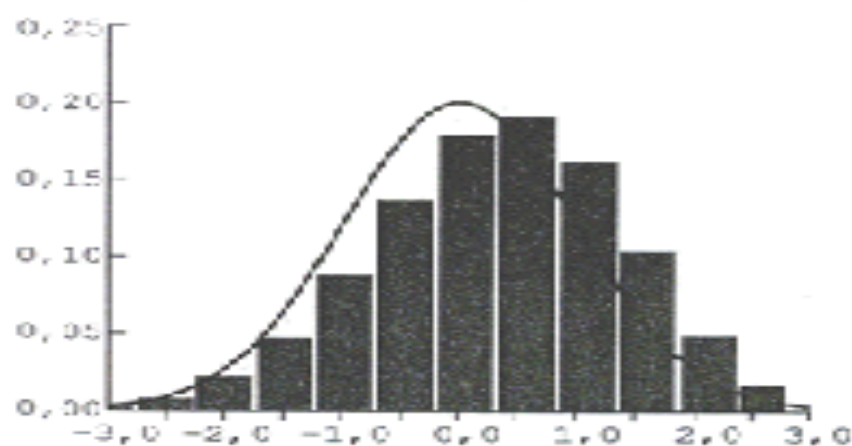
Probabilità



Valore standardizzato
della media campionaria

(b) $n = 5$

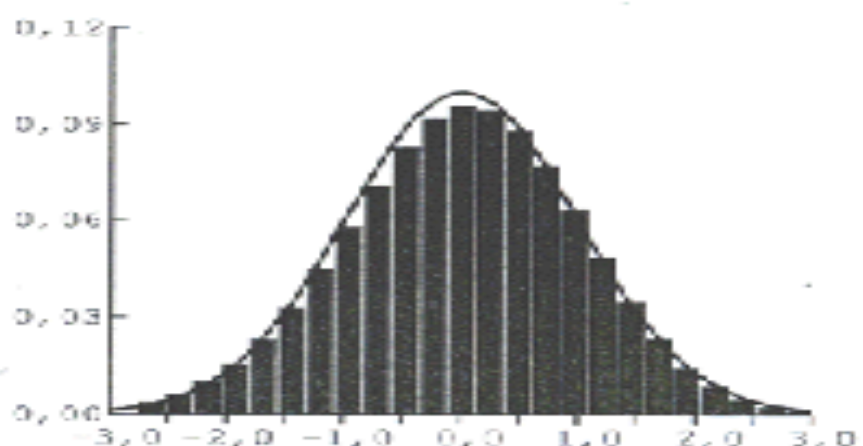
Probabilità



Valore standardizzato
della media campionaria

(c) $n = 25$

Probabilità



Valore standardizzato
della media campionaria

(d) $n = 100$

Distribuzione della media campionaria standardizzata di n estratti da una distribuzione asimmetrica

Figura 2-8: distribuzione della media campionaria standardizzata di n estratti da una distribuzione asimmetrica

